

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

25. Band, Heft 6

17. Januar 1942

S. 241—288

Algebra und Zahlentheorie.

Miller, G. A.: *Fundamental laws of operations in mathematics*. Science, New York 91, 571—572 (1940).

Betrachtungen über das erste Auftreten der Begriffe „assoziatives, kommutatives, distributives Gesetz“ in der mathematischen Literatur. Bemerkungen zur mathematischen Nomenklatur.
H. L. Schmid (Berlin).

Polynome:

Mirimanoff, D.: *Expressions de la somme de deux indéterminées en fonction du produit*. Comment. math. helv. 14, 1—22 (1941).

Sind x_1, x_2, \dots, x_n Unbestimmte und f_1, \dots, f_n ihre elementarsymmetrischen Funktionen, so ist die Untergruppe der symmetrischen Gruppe, die $p = x_1 + x_2$ invariant läßt, dieselbe wie diejenige, die $q = x_1 x_2$ invariant läßt; also muß es möglich sein, p durch q mit Hilfe der f_i auszudrücken. Zweck dieser Abhandlung ist, diesen Ausdruck möglichst einfach zu gewinnen. Ist $R_1 x - R_2$ der Rest von $f(x) = x^n - f_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n f_n$ bei Division durch $x^2 - p x + q$, so haben p und q die Gleichungen $R_1 = 0, R_2 = 0$ zu erfüllen. Aus diesen werden weitere Gleichungen $R_3 = 0, \dots, R_{n-1} = 0$ abgeleitet, die durch $R_i = -q R_{i-2} + p R_{i-1}$ rekursiv definiert sind. Diese Gleichungen sind linear in den durch $\alpha_k = x_1^k + x_1^{k-1} x_2 + \dots + x_2^k$ definierten Größen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$ mit Koeffizienten, die von q, f_1, f_2, \dots, f_n abhängen. Löst man sie mittels Determinanten auf, so erhält man

$$\alpha_k = \frac{N_k}{D} \quad \text{mit} \quad D = (x_1 x_2)^{n-3} \prod_{j>i>2} (x_1 x_2 - x_i x_j),$$

wo D ein Polynom in q und f_1, \dots, f_n vom Gewichte $n(n-3)$, d. h. vom Grade $n(n-3)$ in x_1, x_2, \dots, x_n ist. Insbesondere ist $\alpha_1 = p$. Durch geeignete Umformung kann man das Gewicht des Nenners in dem Ausdruck für p auf $(n-2)^2$ herabdrücken, aber nicht tiefer. Durch einen leichten Kunstgriff kann man auch p und q durch $G = cp + q$ ausdrücken, wobei c ganz beliebig ist. Auf dieser Möglichkeit beruht ein bekannter Beweis von Gauss für den Fundamentalsatz der Algebra.

van der Waerden (Leipzig).

Gruppentheorie:

Krasner, Marc: *La caractérisation des hypergroupes de classes et le problème de Schreier dans ces hypergroupes*. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 948—950 (1941).

Es sei H eine Multigruppe (das Produkt von je zwei Elementen in H ist eine Untermenge in H) mit einer Einheit e derart, daß die Beziehungen $ce = e \in ec$ für $c \in H$ bestehen. Eine Permutation σ von H wird als eine rechtsseitige Permutation bezeichnet, wenn 1. ein $a(\sigma) \in H$ mit der Eigenschaft $\sigma c \in a(\sigma)c$ für $c \in H$ existiert 2. $\sigma(cc') = \sigma c \cdot c'$ für $c, c' \in H$. Ist A eine Untermenge in H , so wird mit $\xi(A)$ die Menge derjenigen rechtsseitigen Permutationen σ von H bezeichnet, für die $a(\sigma) \in A$ gilt. H wird Multigruppe D genannt, wenn sie mit einer aus rechtsseitigen Nebenklassen einer Gruppe G bezüglich einer Untergruppe g in G bestehenden Multigruppe isomorph ist. (G, g) wird dann als eine Darstellung von H bezeichnet; dieselbe heißt irreduzibel, wenn es in g keine von der Einheit verschiedene und in G invariante Untergruppe gibt. Verf. führt (ohne Beweise) notwendige und hinreichende Eigenschaften von Multigruppen D sowie eine kurze Übersicht einer für solche Multigruppen entwickelten und der Schreierschen Erweiterungstheorie entsprechenden Theorie an. Ist z. B. H von endlicher Ordnung, so ist H eine Multigruppe D dann und nur dann, wenn die Menge aller rechtsseitigen Permutationen von H eine Gruppe G bildet und 1. $a(G) = H$, 2. $[\xi(c) \cap G] \cdot [\xi(c') \cap G] = \xi(cc') \cap G$

für $c, c' \in H$ gilt; in diesem Falle ist $(G, \xi(c))$ die (bis auf Isomorphismen) einzige irreduzible Darstellung von H .
O. Borůvka (Brünn).

Magnus, Wilhelm: Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe. J. reine angew. Math. 182, 142—149 (1940).

Verf. gibt ein Verfahren an, wie jeder Gruppe ein Lie-Ring zuzuordnen ist. Zuordnungen dieser Art sind wichtig für die Beantwortung vieler gruppentheoretischer Fragen (z. B. der Lösung eines Problems von Burnside), da die Rechnungen in einem distributiven Ring leichter zu führen sind als in einer Gruppe. — Eine Gruppe \mathfrak{G} aus m Erzeugenden ist isomorph zu der Faktorgruppe der freien Gruppe \mathfrak{F} aus m Erzeugenden a_1, a_2, \dots, a_m nach einem Normalteiler \mathfrak{N} . Nach Verf. (siehe dies. Zbl. 11, 152; 16, 294; 21, 300) läßt sich die Zuordnung $a_i \rightarrow 1 + x_i$ zu einer isomorphen Abbildung von \mathfrak{F} auf eine gewisse Gruppe $\tilde{\mathfrak{F}}$ von Potenzreihen der nicht kommutativen Variablen x_1, x_2, \dots, x_m ergänzen, wobei jedem Element $W(a_1, a_2, \dots, a_m)$ eine Potenzreihe $1 + D(W) + \dots$ zugeordnet ist, in der das Dimensionsglied $D(W)$ die Summe aller Potenzprodukte von kleinster, überhaupt vorkommender Dimension $d(W)$ ist. Die Dimensionsglieder einer festen Dimension n füllen zusammen mit der 0 gerade den Modul L_n , erzeugt aus allen mittels wiederholter Kreismultiplikation $x \circ y = xy - yx$ aus den Erzeugenden x_1, x_2, \dots, x_m gebildeten n -gliedrigen Produkten, aus. Werden nur die Elemente des Normalteilers \mathfrak{N} genommen, so entsteht für jedes n ein Teilmodul N_n von L_n . Nun ist $N = \sum N_i$ ein homogenes Ideal des Lie-Ringes $L = \sum L_i$ in den freien Erzeugenden x_1, x_2, \dots, x_m . Da $L_n/N_n \cong \mathfrak{Z}_n/\mathfrak{Z}_{n+1}$ ist, wobei $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{G}, \dots, \mathfrak{Z}_{n+1} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_n), \dots$ die absteigende Zentralreihe von \mathfrak{G} ist, so ist der Lie-Ring $L^* = L/N$ bis auf Isomorphie eindeutig durch \mathfrak{G} bestimmt. Mit Hilfe der Hausdorffschen Formel wird bewiesen: Jeder Lie-Ring L^* aus endlich vielen Erzeugenden, für den $L^{*k} = 0, p^m L^* = 0, k \leq p$ (p Primzahl), ist einer Gruppe zugeordnet. Dagegen ist der Lie-Ring L^* aus zwei Erzeugenden mit den definierenden Relationen: $L^{*p+2} = p L^* = 0$ keiner Gruppe zugeordnet, obwohl L^* Faktorring eines freien Lie-Ringes nach einem homogenen Ideal ist. Verf. stellt die Vermutung auf, daß bei der vom Ref. [Abh. Math. Semin. Hansische Univ. 13, 200—207 (1939); dies. Zbl. 21, 200] angegebenen Zuordnung die leicht ersichtlichen notwendigen Bedingungen für die Struktur von L^* auch hinreichend sind. — Die Frage nach einer elementweisen Beziehung zwischen Gruppe und zugeordnetem Lie-Ring wird aufgeworfen und im Sonderfall der p -Gruppen mit $\mathfrak{Z}_p = 1$ bejahend beantwortet (Hausdorffsche Formel!). — Zum Schluß wird die Frage nach den homogenen Invarianten des freien Lie-Ringes gegenüber unimodularen linearen Substitutionen seiner Erzeugenden gestellt, deren Beantwortung für die Gruppentheorie von Wichtigkeit wäre. Sie läßt sich auf Untersuchungen über den Gruppenring der symmetrischen Permutationsgruppe zurückführen.

Zassenhaus (Hamburg).

Chang, Ho-Jui: Über Wittsche Lie-Ringe. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 14, 151—184 (1941).

Verf. untersucht in Teil I der Arbeit die Gruppe \mathfrak{G} der Automorphismen des von Witt (siehe dies. Zbl. 16, 244) entdeckten Lie-Ringes L mit den Basiselementen a_1, a_2, \dots, a_p über einem Grundkörper der Charakteristik $p > 0$ und der Multiplikationsregel: $e_i \circ e_k = (k - i)e_{i+k}$; in Teil II werden die absolut irreduziblen Darstellungen bestimmt. — Die Fälle $p = 2, 3$ sind leicht zu behandeln. Im Gegensatz zu einer Vermutung des Ref. ergibt sich, daß für $p > 3$ die Automorphismengruppe \mathfrak{G} des einfachen Lie-Ringes L auflösbar ist. Um sie zu erhalten, führe man in dem Restklassenring \mathcal{A} der Polynome aus $k[x]$ nach x^p die Kreismultiplikation $f \circ g = f'g - f'g$ ein, in der f' die formale Ableitung des Polynomes f ist, man kann dann die Abbildung $a_i \rightarrow a'_i = (1 + x)^{i+1}$ eindeutig zu einer isomorphen Abbildung von L auf \mathcal{A} im Sinne der Kreismultiplikation ergänzen. Die Abbildungen $\sigma_\varphi(f) = f(\varphi(x))/\varphi'(x)$ ($\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{p-1} x^{p-1}, \alpha_1 \neq 0$) sind stets Automorphismen von L . Für $p > 3$ gilt auch die Umkehrung. Ferner hat \mathfrak{G} für $p > 3$ die

Normalteilerkette $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{G}_{p-1} \supset 1$ mit lauter abelschen Faktorgruppen, wobei \mathfrak{G}_r genau aus den σ_p mit $\alpha_1 = 1$ und im Falle $p > 1$: $\alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ besteht. — Unter Verwendung der neuen Basis $e_i = x^{i+1}$ ($i = -1, 0, 1, \dots, p-2$) mit der Multiplikationsregel: $e_i \circ e_k = (k-i)e_{i+k}$, wenn $i+k \leq p-2$, $e_i \circ e_k = 0$, wenn $i+k > p-2$, läßt sich jede absolut irreduzible Darstellung $e_i \rightarrow E_i$ höchstens p -deutig durch p Invarianten $\varepsilon_i = E_i^p$ ($i \neq 0$), $\varepsilon_0 = E_0^p - E_0$ aus k kennzeichnen. Denn durch Rechnung folgt, daß die Matrizen auf den rechten Seiten mit allen E_f vertauschbar sind, also wegen der absoluten Irreduzibilität der Darstellung Vielfache der Einheitsmatrix sind. Sei r die kleinste Zahl, für die sämtliche ε_i mit $i \geq 2r+1$ verschwinden. Nach den 3 Hauptsätzen der Arbeit ist die Anzahl α_f der zu möglichem Grade f und zu vorgegebenen Invarianten gehörigen, nichtäquivalenten irreduziblen Darstellungen: 1) $0 < r < (p-1)/2$, $\alpha_{p+r} = 1$; 2a) $r = 0$, $\varepsilon_0 \neq 0$, $\alpha_p = p$; 2b) $r = 0$, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_{-1} \neq 0$, $\alpha_p = p-1$; 2c) $r = 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = 0$, $\alpha_p = p-2$, $\alpha_{p-1} = 1$, $\alpha_1 = 1$; 3) $r = (p-1)/2$, Fall A: $\alpha_{p(p-1)/2} = p-1$, Fall B: $\alpha_{p(p-1)/2} = p$. Fall A oder B tritt ein, je nachdem durch Anwendung eines Automorphismus eine Basis $\bar{e}_{-1}, \bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{p-2}$ gefunden werden kann, für die $\bar{e}_{-1} = \bar{e}_0 = \dots = \bar{e}_{p-3} = 0$, $\bar{e}_{p-2} = 1$ ist oder nicht. — Die Konstruktion der irreduziblen Darstellungen der von Witt entdeckten Lie-Ringe ist analog zu der durch Ref. [Abh. math. Semin. Hansische Univ. **13**, 1–100 (1939); dies. Zbl. **21**, 200] für die nilpotenten Lie-Ringe ausgeführten. Sie beruht auf der Existenz einer Basis e_1, e_2, \dots, e_t mit der Eigenschaft, daß jeweils e_r, e_{r+1}, \dots, e_t die Basis eines Teilringes bilden. — Die Methoden der Arbeit lassen sich übertragen auf die Lie-Ringe mit den Basiselementen a_α, a_β, \dots und der Multiplikationsregel $a_\alpha \circ a_\beta = (\beta - \alpha)a_{\alpha+\beta}$, wobei α, β, \dots die Elemente eines endlichen Teilmoduls von k durchläuft. Noch nicht entschieden ist, ob die Automorphismengruppen dieser für $p > 2$ einfachen Lie-Ringe im Falle $p > 3$ stets auflösbar sind.

Zassenhaus (Hamburg).

Chevalley, Claude: On the topological structure of solvable groups. Ann. of Math., II. s. **42**, 668–675 (1941).

Jede auflösbare Liesche Gruppe ist Faktorgruppe einer einfach zusammenhängenden auflösbaren Gruppe G nach einem diskreten Normalteiler D im Zentrum von G . Nun wird bewiesen, daß die infinitesimalen Erzeugenden L_1, L_2, \dots, L_n von G so gewählt werden können, daß: 1. jedes Element von G eindeutig als Produkt

$$\exp(t_1 L_1) \exp(t_2 L_2) \dots \exp(t_n L_n)$$

darstellbar ist, 2. es eine Teilmenge L'_1, L'_2, \dots, L'_r dieser Erzeugenden gibt, derart, daß $\exp L'_1, \exp L'_2, \dots, \exp L'_r$ eine Basis für D bilden und $[L'_i, L'_k] = 0$ ist. Danach läßt sich die topologische Struktur der Faktorgruppe G/D unmittelbar angeben: sie ist homöomorph zum Produkt eines Torusraumes und eines kartesischen Raumes.

van der Waerden (Leipzig).

Higman, Graham: The units of group-rings. Proc. London Math. Soc., II. s. **46**, 231–248 (1940).

$R(G, K)$ bezeichne den Gruppenring der Gruppe G mit dem das Einheitselement 1 enthaltenden Ring K als Koeffizientenbereich. Ein Element E_1 aus $R(G, K)$ heißt eine Einheit, wenn ein $E_2 \in R(G, K)$ existiert mit $E_1 \cdot E_2 = 1$. C sei der Ring der gewöhnlichen ganzen Zahlen, G eine Gruppe mit nur Elementen endlicher Ordnung. Dann und nur dann gibt es in $R(G, C)$ nur die trivialen Einheiten $\pm E$, $E \in G$, wenn G 1. eine Abelsche Gruppe ist, deren Elemente nur Ordnungen haben, die Teiler von 4 sind; 2. eine Abelsche Gruppe ist, deren Elemente nur Ordnungen haben, die Teiler von 6 sind; 3. das direkte Produkt einer Quaternionengruppe und einer Abelschen Gruppe mit Elementen der Ordnung 2 ist. G heißt indikabel, wenn zu jeder Untergruppe H ein Homomorphismus von H auf die additive Gruppe der rationalen Zahlen existiert, der nicht alle Elemente auf Null abbildet. Jede freie Gruppe und jede freie Abelsche Gruppe ist indikabel. Enthält K keine Nullteiler, so enthält für jede indikable Gruppe

$R(G, K)$ nur triviale Einheiten. Eine mit topologischen Fragen zusammenhängende Untersuchung über elementare Umformungen an Matrizen mit Elementen aus Gruppenringen $R(G, C)$ beschließt die Arbeit. G. Köthe (Gießen).

Jennings, S. A.: The structure of the group ring of a p -group over a modular field. Trans. Amer. Math. Soc. 50, 175—185 (1941).

\mathfrak{G} sei eine endl. p -Gruppe. Verf. betrachtet den Gruppenring von \mathfrak{G} über dem Primkörper der Charakteristik p . \mathfrak{A} sei die so entstehende Algebra. \mathfrak{A} enthält das Radikal \mathfrak{R} , bestehend aus allen $\sum_i \alpha_i s_i, s_i \in \mathfrak{G}, \sum \alpha_i \equiv 0(p)$. Die sämtlichen Elemente

von \mathfrak{G} , die $s \equiv 1(\mathfrak{M}^\lambda)$ erfüllen, $\lambda = 1, 2, \dots$, bilden eine charakteristische Untergruppe \mathfrak{R}_λ von \mathfrak{G} . Für diese \mathfrak{R} -Reihe gilt: 1) $(\mathfrak{R}_\lambda, \mathfrak{R}_\mu) \leq \mathfrak{R}_{\lambda+\mu}$; 2) $K_\lambda^p \in \mathfrak{R}_{\lambda p}$, wenn $K_\lambda \in \mathfrak{R}_1$; 3) $\mathfrak{R}_\lambda / \mathfrak{R}_{2\lambda}$ ist abelsch vom Typ (p, p, \dots, p) . Nach einigen weiteren Sätzen zeigt Verf.: „Die \mathfrak{R} -Reihe einer Gruppe, in der alle p -ten Potenzen gleich 1 sind, ist identisch mit der absteigenden Zentrenreihe.“ Und: „Die \mathfrak{R} -Reihe einer abelschen Gruppe vom Typus $(p^{\mu_1}, p^{\mu_2}, \dots, p^{\mu_d})$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_d$ hat die Länge p^{μ_1-1} .“ Hierzu ist zu sagen, daß die \mathfrak{R} -Reihe einer abelschen Gruppe vom genannten Typus aber nur genau μ_1 verschiedene Untergruppen enthält, es wird nämlich $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_3 = \dots = \mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{R}_{p+1} = \mathfrak{R}_{p+2} = \dots = \mathfrak{R}_{p^2}$, \dots , $\mathfrak{R}_{p^{\mu_1-1}+1} = \mathfrak{R}_{p^{\mu_1-1}+2} = \dots = \mathfrak{R}_{p^{\mu_1}} = 1$. — Die Arbeit bringt keine neuen Ergebnisse oder Gesichtspunkte. Verf. erwähnt selbst, im Anschluß an eine von ihm zitierte Arbeit von Zassenhaus, die Theorie der Dimensionsgruppen und ihren Zusammenhang mit seiner \mathfrak{R} -Reihe. Leider ist ihm aber diese Theorie und die betr. deutsche Literatur unbekannt geblieben. Die Dimensionsgruppen wurden von Magnus [Math. Ann. 111, 259—280 (1935); dies. Zbl. 11, 152] eingeführt. Die von Magnus sofort vermutete Identität der Reihe der Dimensionsgruppen mit der absteigenden Zentrenreihe wurde dann nacheinander von dem Ref., Magnus und Witt bewiesen. Die Gruppen \mathfrak{R}_λ des Verf. stehen nun in folgendem Zusammenhang mit der Dimensionsgruppe \mathfrak{D}_λ , also den λ -ten Untergruppen der absteigenden Zentrenreihe: \mathfrak{R}_λ ist die Gruppe, die aus \mathfrak{D}_λ , den p -ten Potenzen aller Elemente aus $\mathfrak{D}_{\left[\frac{\lambda-1}{p}\right]+1}$, den p^2 -ten Potenzen aller Elemente aus $\mathfrak{D}_{\left[\frac{\lambda-1}{p^2}\right]+1}, \dots$ entsteht. Daraus folgen alle

Resultate des Verf. sofort in einfacher Weise, wenn man die Identität der Dimensionsgruppen mit den Untergruppen der abst. Zentrenreihe berücksichtigt. Grün.

Zappa, Guido: Sulla relazione tra il rango e il tipo di un gruppo. Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 574—585 (1941).

Ref. bewies in seinen Untersuchungen über die Struktur der Gruppen endlicher Ordnung, daß $r \leq (\tau + 2)/3$ ist, wenn r der Rang und τ der Typus einer solchen Gruppe ist [Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, III. s. 17, 226—232 (1911)]. G. Scorza bewies die schärfere Beziehung $r \leq (\tau + 5)/6$ und auch die weitere $r \leq (\tau + 7)/7$ [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 6, 361—365, 441—445 (1927); 7, 173—178 (1928)]. Aus jeder der beiden Relationen ergibt sich, daß eine Gruppe vom Range 2 mindestens vom Typus 7 sein muß. Diese Tatsache war bereits von V. Amato festgestellt worden, der auch ein Beispiel einer Gruppe vom Typus 7 und Rang 2 gab [Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, III. s. 24, 121—131, 136—144 (1918)]. Verf. beweist in Erweiterung einiger Sätze von G. Scorza eine für $\tau > 14$ noch schärfere Beziehung, und zwar $r \leq (\tau + 9)/8$. Eine Gruppe vom Range 3 muß demnach mindestens vom Typus 15 sein. M. Cipolla (Palermo).

Verbände. Ringe. Körper:

Klein, Fritz: Molekulare Verbände. Math. Z. 47, 373—394 (1941).

M sei im folgenden ein endlicher Verband. Ein Element $a \in M$ heißt gespalten, wenn es zwei Elemente x, y gibt, so daß $a = x \cup y$, $a \neq x$, $a \neq y$ ist. Zwei Elemente a und b aus M heißen zueinander fremd, $a \perp b$, wenn aus $a > x$ und $b > x$ die Gleichung $x = e$ folgt, e das Nullelement des Verbandes. M heißt molekular, wenn 1) aus

a ungespalten, $a > b$, folgt, daß auch b ungespalten ist, wenn 2) für zwei ungespaltene Elemente a, b aus M stets $a \perp b$ oder $a > b$ oder $a < b$ gilt. Es werden als Beispiele alle molekularen Verbände mit $n \leq 6$ Elementen angegeben. Ein ungespaltenes Element aus M heißt Primärelement. Die Primärelemente lassen sich in lineare Teilverbände aufteilen, die so aussehen: $p_k^{(0)} = e < p_k^{(1)} < \dots < p_k^{(\delta_k)}$, $k = 1, \dots, n$. Jedes $p_k^{(i)}$ ist unmittelbarer Nachbar von $p_k^{(i-1)}$. Der obere Index heißt der Grad, $p_k^{(1)}$ heißt Primelement. Jedes Element a aus M besitzt wenigstens eine kanonische Darstellung $a = p_1^{(\xi_1)} \cup \dots \cup p_n^{(\xi_n)}$, $0 \leq \xi_k \leq \delta_k$. Dann und nur dann besitzt jedes Element eines molekularen M nur eine einzige kanonische Darstellung, wenn M distributiv ist. Ein solcher Verband heißt unimolekular. Der Teilverband aller x mit $a < x < b$ eines molekularen M braucht nicht molekular zu sein, ist aber unimolekular, wenn M unimolekular ist.

G. Köthe (Gießen).

Richardson, A. R.: Algebra of s dimensions. Proc. London Math. Soc., II. s. 47, 38—59 (1940).

Der Verf. versteht unter einer Algebra von s Dimensionen ein System von Elementen, bei denen je s , aber nicht weniger, multiplikativ verknüpft werden können. (Wegen des mißverständlichen Ausdrucks Algebra ist es gut zu bemerken, daß von einer additiven Verknüpfung nicht die Rede ist.) Es wird nur der Fall endlicher Elementenzahl unter der Annahme $s = 3$ betrachtet und in 31 Theoremen ausführlich diskutiert, auf die hier einzugehen zu weit führen würde. Der Verf. hält für derartige Systeme einen besonderen Terminus für notwendig, verfällt dabei aber unglücklicherweise auf den vom Ref. [Math. Ann. 96, 360—366 (1926)] in ganz anderem Sinne eingeführten und so in Gebrauch gekommenen Ausdruck Gruppoid (groupoid). Er vermehrt dadurch die schon bestehende Verwirrung im Gebrauch dieser Bezeichnung (vgl. Borůvka, dies. Zbl. 24, 399).

Brandt (Halle).

Kolchin, Ellis Robert: On the exponents of differential ideals. Ann. of Math., II. s. 42, 740—777 (1941).

Anschließend an frühere Untersuchungen von Ritt (dies. Zbl. 5, 394) und Raudenbush (dies. Zbl. 9, 100) wird der Exponent eines Differentialideals σ in bezug auf das zugehörige perfekte Ideal $\{\sigma\}$ definiert als die kleinste natürliche Zahl p mit der Eigenschaft $\{\sigma\}^p \subseteq \sigma$. Gibt es keine solche Zahl, so wird $p = \infty$ gesetzt. Ist σ als Produkt von teilerfremden Idealen dargestellt, so ist sein Exponent der größte ihrer Exponenten. Der Exponent eines Ideals aus Differentialformen bleibt ungeändert bei Erweiterung des Koeffizientenkörpers. Wenn eine Differentialform A einen vielfachen Faktor besitzt, so hat das von ihr erzeugte Differentialideal $[A]$ den Exponenten ∞ . Nun sei A eine Differentialform erster Ordnung ohne vielfache Faktoren. Singuläre Lösungen von A sind solche Lösungen η , die den Separanten S von A annullieren. Ist η eine solche und betrachtet man A als Form in $z = y - \eta$ und dessen Ableitung $z_1 = y_1 - \eta_1$, so wird unter der Multiplizität von η der kleinste Grad eines wirklich in A vorkommenden Gliedes $Pz^\mu z_1^\nu$ verstanden. Nun wird bewiesen: Wenn A eine singuläre Lösung mit Multiplizität > 1 besitzt, so hat A den Exponenten ∞ . Hat A nur singuläre Lösungen η_1, \dots, η_s mit Multiplizität 1 und setzt man $\Sigma_i = [y_i - \eta_i]$, so gilt für $[A]$ die Produktdarstellung $[A] = \Sigma_0 \Sigma_1 \dots \Sigma_s$, wobei die Mannigfaltigkeit von Σ_0 aus den nichtsingulären Lösungen von A besteht. Für Σ_0 wird eine Basisdarstellung angegeben, in der gewisse Formen I_1, \dots, I_s auftreten. Ist nun

$$(1) \quad 1 \equiv 0(\Sigma_0, S, I_1, \dots, I_s),$$

so heißt A vom regulären Typus. In diesem Fall ist der Exponent 1 oder 2, je nachdem, ob die singulären Lösungen von A alle von der ersten Klasse sind oder nicht. Hat schließlich A keine singulären Lösungen und sind A_1, A_2, \dots die sukzessiven Ableitungen von A , so gilt i. a. die Bedingung

$$(2) \quad 1 \equiv 0(S, A, A_1, \dots, A_q),$$

und dann hat A den Exponenten 1. Es gibt aber Ausnahmefälle, in denen die Bedin-

gung (1) bzw. (2) nicht erfüllt ist. Im letzten Kapitel werden Ketten $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_{n-1} \subset \sigma^*$ mit der Eigenschaft $\sigma^* \subseteq \{\sigma_0\}$ betrachtet; in den Beispielen ist stets $\sigma^* = \{\sigma_0\}$. Unter der Annahme, daß die Kette sich nicht verfeinern läßt, wird eine Schranke für den Exponenten von σ_0 in bezug auf σ^* angegeben. In einem Anhang wird die Resolvententheorie des anfangs zitierten Buches von Ritt so verallgemeinert, daß sie für beliebige Differentialkörper von der Charakteristik Null gilt. *van der Waerden.*

Comét, Stig: *Note sur la représentation régulière d'une algèbre linéaire.* Sonderdruck aus: Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. 11, Nr 10, 5 S. (1941).

Verf. betrachtet assoziative Algebren \mathfrak{A} , in denen die Matrizen R_1, \dots, R_n der regulären Darstellung der Basiselemente e_1, \dots, e_n linear abhängen. Er zeigt, daß durch Einführung eines rechtsseitigen Einheitselementes e_0 die Algebra \mathfrak{A} in eine Algebra \mathfrak{A}' mit der verlängerten Basis e_0, e_1, \dots, e_n so eingebettet werden kann, daß die Matrizen R'_1, \dots, R'_n der regulären Darstellung von e_1, \dots, e_n (als Elemente von \mathfrak{A}') linear unabhängig sind. — Damit die R_i linear unabhängig sind, ist notwendig und hinreichend, daß in \mathfrak{A} ein zweiseitiges Ideal $\alpha \neq 0$ existiert mit der Eigenschaft $\alpha\mathfrak{A} = 0$. — Gibt es in einer assoziativen Algebra \mathfrak{B} ein Element, das nicht Linksnullteiler ist, so existiert in \mathfrak{B} ein rechtsseitiges Einheitselement. *H. L. Schmid* (Berlin).

Tornheim, Leonard: *Integral sets of quaternion algebras over a function field.* Trans. Amer. Math. Soc. 48, 436—450 (1940).

Es wird eine Quaternionenalgebra betrachtet, deren Zentrum der rationale Funktionenkörper $\mathbb{R}(x)$ über einem beliebigen Körper \mathbb{R} ist. Eine solche Algebra wird erzeugt gedacht durch zwei Elemente α, β , welche den Bedingungen $\alpha^2 + a = \beta^2 + b = \alpha\beta + \beta\alpha = 0$ genügen, wo a, b Polynome aus dem Polynombereich $\mathbb{R}[x]$ sind. Diese Bedingungen sind nur ein wenig umzuändern, wenn \mathbb{R} die Charakteristik 2 hat. Es wird die Basis einer maximalen Ordnung \mathfrak{o} bestimmt, welche, wie stillschweigend angenommen wird, die Elemente α und β enthält. Es ist zwar richtig, wird aber nicht bewiesen, daß es in jeder maximalen Ordnung \mathfrak{o}' Elemente von ähnlichen Eigenschaften wie α, β gibt. Die Grundzahl der Algebra läßt sich aus α und β berechnen und ist unabhängig von der Auswahl dieser Elemente. Es wird die Zerlegung von Primidealen aus $\mathbb{R}(x)$ in \mathfrak{o} untersucht, wobei die Fälle, daß \mathbb{R} der reelle Zahlkörper oder ein Galoisfeld ist, näher betrachtet werden. Endlich wird der für Quaternionenalgebren mit rationalem Zentrum schon mehrfach bemerkte Zusammenhang, der zwischen den Idealen gewisser, i. a. nicht maximalen Ordnungen und binären Hermiteschen Formen besteht (vgl. Latimer, dies. Zbl. 13, 50 und 15, 390), vom Verf. auf seine Bereiche ausgedehnt.

Brandt (Halle).

Neuhaus, Albert: *Products of normal semi-fields.* Trans. Amer. Math. Soc. 49, 106—121 (1941).

Die Arbeit knüpft an die vom Ref. eingeführten Normalringe (Deutsche Math. 1, 92—102, 197—238; dies. Zbl. 13, 340, 14, 249) und Alberts Bearbeitung davon an. Während Ref. nur die zyklischen Normalringe multiplizierte, definiert Verf. ein allgemeineres „Produkt“ so: Ist S hinsichtlich der Gruppe \mathfrak{G} und T hinsichtlich $\mathfrak{G}^* \text{ i. b. a.}$ den gemeinsamen Grundkörper K Normalring, d. h. sind für einen passenden Oberkörper L von K die Erweiterungen S_L, T_L direkte Summen von zu L i. b. a. K isomorphen Körpern, die von \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{G}^* einfach transitiv permutiert werden, und ist ein bestimmter Isomorphismus einer Faktorgruppe von \mathfrak{G} nach einem die Kommutatorgruppe von \mathfrak{G} enthaltenden Normalteiler \mathfrak{N} von \mathfrak{G} mit einer im Zentrum von \mathfrak{G}^* enthaltenen Untergruppe \mathfrak{S}_c^* gegeben, der etwa der Restklasse $g\mathfrak{N}$ ($g \in \mathfrak{G}$) das Element $g^* \in \mathfrak{S}_c^*$ zugeordnet, so sei W im direkten Produkt $S \times T$ i. b. a. K die Menge der bei allen gg^{*-1} ($g \in \mathfrak{G}$) invarianten Elemente; die Elemente von \mathfrak{G}^* führen dann W in sich über, und W ist hinsichtlich $\mathfrak{G}^* \text{ i. b. a.}$ K Normalring; Verf. schreibt dann $(S, \mathfrak{G}) (T, \mathfrak{G}^*) = (W, \mathfrak{G}^*)$. Wenn $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*$ abelsch ist und $\mathfrak{N} = 1$, also $\mathfrak{S}_c^* = \mathfrak{G}^*$ gesetzt wird und $g \rightarrow g^*$ die Identität ist, werden so alle „Paare“ (S, \mathfrak{G}) mit festem Abelschen \mathfrak{G} und festem Grundkörper K zu einer Abelschen Gruppe gemacht, in der jedes Element endliche Ordnung hat; im

allgemeinen Fall scheint es dem Ref. besser, (S, \mathfrak{G}) als Operator anzusehen, der auf (T, \mathfrak{G}^*) wirkt. Es wird eine zugehörige Identität für verschränkte Produkte bewiesen, für die auf die Arbeit selbst verwiesen sei. Es scheint Verf. entgangen zu sein, daß der Fall, wo \mathfrak{G} zyklisch und $\mathfrak{N} = 1$, \mathfrak{G}^* aber beliebig ist, bereits vom Ref. a. a. O. behandelt wurde. Die Darstellung ist leider z. T. ungenau. Auf S. 107, Zeile 17 läßt \mathfrak{G} nur e^{σ^r} , nicht notwendig die anderen e^{σ^r} invariant. Teichmüller (Berlin).

Loonstra, F.: Folgen und Reihen in bewerteten Körpern. 2. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 577—589 (1941).

Im Stile seiner ersten Mitteilung (dies. Zbl. **24**, 291; **25**, 15) setzt Verf. die Übertragung der elementaren Sätze über konvergente Potenzreihen auf den Fall eines beliebigen bewerteten Körpers fort. [Substitution einer Potenzreihe in eine andere, Auflösung einer Potenzreihengleichung $Q(x, y) = 0$ nach y im einfachsten Fall, Reziproke und Inverse einer gegebenen Reihe.] Den Abschluß der Note bildet der Beweis des (im wesentlichen bekannten [vgl. W. Schöbe, Diss. 1930]) Satzes, daß bei einem nicht archimedisch bewerteten Körper eine analytische Fortsetzung über den ursprünglichen Konvergenzkreis hinaus nicht möglich ist. Krull (Bonn).

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Siegel, Carl Ludwig: Equivalence of quadratic forms. Amer. J. Math. **63**, 658—680 (1941).

Zwei symmetrische Matrizen $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ mit Koeffizienten aus einem Ring P heißen äquivalent in P , wenn es Matrizen $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ über P gibt, so daß $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{V}'\mathfrak{T}\mathfrak{V}$. Mit R, R_p (p Primzahl), R_∞ bezeichnen wir der Reihe nach die Körper der rationalen, p -adischen und reellen Zahlen. J, J_p seien die Bereiche der ganzen Zahlen in R, R_p ; wir setzen noch $J_\infty = R_\infty$. (1) Nach Hasse [J. reine angew. Math. **152**, 205—224 (1923)] sind zwei symmetrische Matrizen $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ über R dann und nur dann in R äquivalent, wenn sie in allen R_p und R_∞ äquivalent sind. Der entsprechende Satz für J, J_p, J_∞ an Stelle von R, R_p, R_∞ ist im allgemeinen falsch. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, führt Verf. den Begriff der Semiäquivalenz ein: Zwei symmetrische Matrizen $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ über J werden semiäquivalent genannt, wenn es zu jeder vorgegebenen ganzen Zahl q zwei Matrizen $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ über R gibt derart, daß $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{V}'\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ und die Nenner der Koeffizienten von $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ zu q teilerfremd sind. (2) Es zeigt sich dann, daß $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ genau dann semiäquivalent sind, wenn $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ in allen J_p und J_∞ äquivalent sind. Überträgt man die Begriffe der Äquivalenz und Semiäquivalenz auf die mit den Koeffizienten der Matrizen gebildeten quadratischen Formen, so ist damit ein Geschlecht quadratischer Formen charakterisiert als die Gesamtheit der Formen, die zu einer festen semiäquivalent sind. Während Hasse beim Beweis des Theorems (1) vom Dirichletschen Satz über die Primzahlen in arithmetischen Progressionen Gebrauch macht, verwendet Verf. beim Beweis der Sätze (1) und (2) nur Gaußsche Summen, Thetafunktionen und die Hardy-Littlewoodsche „Kreismethode“ und setzt überdies nur geringe Kenntnisse aus der Arithmetik voraus. Das Beweisverfahren kann ohne Schwierigkeit auf quadratische Formen mit Koeffizienten aus einem algebraischen Zahlkörper übertragen werden. Maaß (Heidelberg).

Niven, Ivan: Integers of quadratic fields as sums of squares. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 405—417 (1940).

Kleine lateinische Buchstaben (außer i) bezeichnen ganze rationale Zahlen. Es seien $\theta = \sqrt{d}$ (d quadratfrei, $\neq 1$), R_0 der Ring des durch θ gegebenen absolut quadratischen Zahlkörpers. Durch $[\alpha, R_0, k] = 1$ bzw. 0 wird ausgedrückt, daß α eine Summe von k Quadratzahlen in R_0 ist oder nicht. Um $[\alpha, R_0, k]$ zu bestimmen, müssen die aus den Zahlen $a + e\theta$ gebildeten Teilringe R_e ($e = 1, 2$) mitbetrachtet werden. [Für $d \neq 1 \pmod{4}$ ist $R_1 = R_0$.] Symbole $[\alpha, R_e, k]$ sind ähnlich zu deuten wie oben. Die Arbeit enthält dann Aussagen der Form $[\alpha, R_e, k] = 1$. — Der imaginäre Fall $d = -m$ (< 0) wird so gut wie vollständig erledigt auf Grund eines Satzes von Mordell

(dies. Zbl. 3, 193) über die Darstellbarkeit binärer quadratischer Formen als Summe von zwei linearen Formenquadraten dadurch, daß $a + b\theta = (a + tm) + b\theta + t\theta^2$ (t beliebig) als eine quadratische Form in 1 und θ aufgefaßt wird. Der Fall $d = -1$ wird vorangeschickt mit dem Resultat (Satz 2): Es ist $[a + 2bi, R, 2] = 1$ dann und nur dann, wenn $\frac{a}{2}$ und b nicht beide ungerade ganz sind; es ist immer $[\alpha_2, R, 3] = 1$.

(All dies folgt viel leichter aus

$$\alpha = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha i - i}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{4} + 1\right)^2 + \left(\frac{\alpha i}{4} - i\right)^2 = \left(\frac{\alpha - 2i}{2 - 2i}\right)^2 + \left(\frac{\alpha + 2i}{2 + 2i}\right)^2,$$

und es sind sogar alle Darstellungen $\alpha = \beta^2 + \gamma^2$ in R_0 leicht anzugeben. Ref.) Im allgemeinen Fall gilt: (Satz 3) Es ist $[a + 2b\theta, R_1, 2] = 1$ dann und nur dann, wenn es ein t gibt so, daß $mt^2 + at - b$ eine Quadratzahl ist und $(t, b, a + mt)$ keine Primzahl der Form $4n + 3$ zur ungeraden Potenz enthält. (Satz 4) Immer gilt $[\alpha_2, R_1, 3] = 1$. Ist obendrein $d \equiv 1 \pmod{4}$, so ergibt sich leicht: (Satz 5) Ist α_1 kein α_2 , so ist $[\alpha_1, R, 2] = [4\alpha_1, R_1, 2]$; ist α_0 in R_0 kein α_1 , so ist $[\alpha_0, R, 2] = [4\alpha_0, R_1, 2]$. (Satz 6) Für jedes α_0 in R_0 gilt $[\alpha_0, R_0, 3] = 1$. — Der reelle Fall $d = m(>1)$ verhält sich stark abweichend. Wieder mit Hilfe eines Mordellschen Darstellbarkeitsatzes [Quart. J. Math. 1, 276–288 (1930)] wird gefunden: (Sätze 7 und 8) Es ist $[\alpha_2, R_1, 5] = 1$ dann und nur dann, wenn $K = (a^2 - 4mb^2)^{\frac{1}{2}}$ reell und $\frac{a-K}{2m} \leq t \leq \frac{a+K}{2m}$ lösbar ist; dann und nur dann, wenn dies der Fall und für eine Lösung $-mt^2 + at - b^2$ die Summe von drei Quadratzahlen ist, gilt auch $[\alpha_2, R_1, 4] = 1$. — Alles wird noch in diophantische Gleichungen übersetzt. Rédei (Szeged).

Sansone, Giovanni: La formula di bisezione della \wp -Funktion di Weierstrass, e un teorema sui punti razionali delle cubiche ellittiche a coefficienti razionali. Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 124–128 (1940).

Ist $\wp(u)$ die Weierstraßsche \wp -Funktion, so gilt:

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) = \wp(u) + \sqrt{\wp(u) - e_1} \sqrt{\wp(u) - e_2} + \sqrt{\wp(u) - e_2} \sqrt{\wp(u) - e_3} + \sqrt{\wp(u) - e_3} \sqrt{\wp(u) - e_1}.$$

Mit Hilfe dieser Formel beweist Verf. den folgenden Satz: Ist (x, y) ein rationaler Punkt auf einer kubischen Kurve $C_3: y^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$, (X, Y) der Berührungspunkt einer Tangente durch (x, y) an die C_3 , so sind X und Y dann und nur dann rational, wenn $\sqrt{x - e_1}$, $\sqrt{x - e_2}$, $\sqrt{x - e_3}$ rational sind. O.-H. Keller.

Lind, Carl-Erik: Untersuchungen über die rationalen Punkte der ebenen kubischen Kurven vom Geschlecht Eins. Uppsala: Diss. 1940. 97 S.

Nach einer historischen Einleitung behandelt Verf. zunächst die Kurve $x^3 + Mx^2 + Nx = y^2$, wo die Wurzeln der linken Seite alle voneinander verschieden sind. M und N sind ganz rational. Die Kap. 2, 3, 4 sind den exzeptionellen Punkten dieser Kurven gewidmet, d. h. jenen Punkten, wo das stets anwendbare Verfahren zur Gewinnung neuer rationaler Punkte aus gegebenen durch Ziehung der Tangente und Schnitt derselben mit der Kurve bei entsprechend häufiger Iteration wieder zum Ausgangspunkt zurückführt (Steinersches Schließungsproblem). Verf. gewinnt Teilbarkeitsaussagen über die Anzahl n der exzeptionellen Punkte, z. B.: $24 \nmid n$, $32 \nmid n$; ist überdies $M^2 - 4N$ kein rationales Quadrat, so gilt auch $16 \nmid n$. Kap. 5 gibt interessante Hilfssätze über quadratische und biquadratische Reste, Kap. 6 diskutiert die biquadratische Gleichung vom Geschlecht 1: $AX^4 + BX^2Y^2 + CY^4 = DZ^2$, wo im Gegensatz zum vorigen alle Buchstaben ganze rationale Zahlen sein sollen. Verf. führt vorher in Kap. 3 das Problem auf dieses zurück. Es wird eine große Zahl notwendiger Bedingungen angegeben, unter denen die Gleichung möglicherweise lösbar ist. Als Beispiel mag die Gleichung $F^2X^4 - RG^2Y^4 = -Z^2$ dienen, wo alle vorkommenden Größen wieder ganze Zahlen sein sollen. Es muß für eine in F aufgehende natürliche Primzahl p , wenn $p \equiv -1 \pmod{8}$ oder, wenn $p \equiv 3 \pmod{8}$ und zugleich F gerade, oder im letzten Falle $R \equiv 9F^2G^2 \pmod{16}$ ist, $(-p/R)_4 = (-p/G)$ sein; ist aber

$p \equiv 3 \pmod{8}$, F ungerade und $R \equiv 5 \pmod{8}$, so muß sein $(-p/F)_4 = -(-p/G)$. Hierbei ist (a/b) das quadratische, $(a/b)_4$ das biquadratische Restsymbol, wobei bemerkt werde, daß letzteres in der Arbeit nur dann vorkommt, wenn $(a/b) = 1$ ist, also das biquadratische Potenzrestsymbol einen der Werte ± 1 hat. Kap. 7 gibt unter Rückkehr zu Kurven dritter Ordnung einige spezielle Ergebnisse, Kap. 8 einiges über Punkte mit Koordinaten aus einem quadratischen Zahlkörper auf Kurven dritter Ordnung. *Holzer* (Wien).

Châtelet, François: Courbes réduites dans les classes de courbes de genre 1. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 320—322 (1941).

L'équivalence de la recherche des points rationnels d'une courbe de genre 1 à celle de la décomposition en „classes“ d'une „surclasse“ de courbes de même module, a été indiquée antérieurement par l'A. [C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1532—1533 (1938); ce Zbl. **18**, 343]. Il étudie ici la structure du groupe de ces classes pour une loi de composition induite par celle qu'il établit sur des courbes auxiliaires de E_4 . (Ces „courbes de Weil“ sont des recouvrements non ramifiés de degré convenable de la cubique de Weierstrass définissant la „surclasse“ étudiée. Il y en a une dans chaque classe, qu'on sait construire.) *Chabauty* (Paris).

Chabauty, Claude: Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 882—885 (1941).

Démonstration, dans certains cas, d'une conjecture de Mordell: si C est une courbe algébrique dont les coefficients appartiennent à un corps algébrique fini K_0 , et si K désigne un sur-corps fini de K_0 , la courbe C ne possède qu'un nombre fini de points rationnels par rapport à K . Ce travail repose sur une notion nouvelle, celle de rang réduit. Si le genre g de C est > 0 et si le rang réduit r est $< g$, la conjecture de Mordell est vraie. *Dubreil* (Paris).

Chabauty, Claude: Sur les points rationnels des variétés algébriques dont l'irrégularité est supérieure à la dimension. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 1022—1024 (1941).

Soit (V) une variété de Picard, de dimension q , définie dans un espace projectif (X^n) sur le corps H_p des nombres algébriques p -adiques, par des équations à coefficients algébriques. Après avoir défini le rang arithmétique r de (V) pour un corps K , extension algébrique finie du corps K_0 des coefficients, l'a. établit, en suivant une méthode parallèle à celle de sa thèse [Ann. Mat. pura appl., IV. s. **17**, 127—168 (1938); ce Zbl. **19**, 3] les théorèmes suivants. I. Si une sous-variété algébrique (W) de (V) , de dimension s , contient un ensemble infini E de points rationnels (c. à d. à coordonnées dans K), il y a une variété de Picard $(V^*) \subset (V)$, de dimension $r + s - 1$, qui contient un sous-ensemble infini de E . II. Soit (W) une variété algébrique de dimension s , d'irrégularité q ; soit r le rang arithmétique de sa variété de Picard et soit $r \leq q - s$; alors (W) ne peut contenir un ensemble irréductible de points rationnels. Si (W) contient un ensemble infini E de points rationnels inéquivalents, c'est à dire ne correspondant pas aux mêmes valeurs des intégrales de Picard de (W) , il y a une sous-variété algébrique (W^*) de (W) contenant un sous-ensemble infini E' de E et sur laquelle sont constantes $q - r - s + 1$ intégrales de Picard linéairement indépendantes sur (W) ; si les intégrales de Picard de (W) sont irréductibles, (W) ne peut contenir qu'un nombre fini de points rationnels inéquivalents. — On retrouve à partir de là, comme cas particuliers, les résultats de la Note précédente. *Dubreil*.

Zahlentheorie:

Kant, Georg: Über einen Satz aus der Theorie der biquadratischen Reste. Deutsche Math. **5**, 269—272 (1940).

Ausdehnung des sog. Gaussischen Lemmas aus der Theorie der biquadratischen Reste (Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum*, commentatio secunda, art. 71) auf zusammengesetzte Moduln. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Specht, Wilhelm: Primteiler von Zahlenfolgen. 2. Deutsche Math. **6**, 89—96 (1941).

Es seien q_1, \dots, q_m untereinander verschiedene Primzahlen; $b_1 < b_2 < b_3 < \dots$ sei die Folge aller Zahlen der Gestalt $q_1^{\alpha_1} \dots q_m^{\alpha_m}$ ($\alpha_i \geq 0$ ganz); $Q = q_1 \dots q_m$, $\gamma^m = m! \log q_1 \dots \log q_m$, $\gamma > 0$. Man findet leicht $Q^{-1} \exp\left(\gamma n^{\frac{1}{m}}\right) \leq b_n \leq \exp\left(\gamma n^{\frac{1}{m}}\right)$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{m}} \log(b_n - b_{n-1}) = \gamma, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n - b_{n-1}) n^{1-\frac{1}{m}} \exp\left(-\gamma n^{\frac{1}{m}}\right) > 0.$$

Es sei $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ eine Folge natürlicher Zahlen; $\psi(n)$ sei die Anzahl derjenigen Primzahlen, welche im Produkt $a_1 a_2 \dots a_n$ aufgehen. Aus den angeführten Resultaten folgt durch einfache Überlegungen: Ist $0 < \alpha < 1$, $a_{n+1}/a_n = 1 + o(n^{\alpha-1})$, so ist $\psi(n) > \alpha^{-1}$ für große n ; ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} \log \log a_n \cdot (\log n)^{-1} = 0$, so ist

$$\psi(n) > \log n \cdot (\log \log a_n)^{-1}$$

für große n . Zu 1. vgl. dies. Zbl. **19**, 394.

Jarník (Prag).

Specht, Wilhelm: Berichtigung zu „Primteiler von Zahlenfolgen“. Deutsche Math. **6**, 134 (1941).

In der Formel (23) der vorstehend besprochenen Arbeit lies $\log P_m$ statt P_m .

Jarník (Prag).

Stern, Erich: Über eine zahlentheoretische Methode zur Bildung und Anzahlbestimmung neuartiger lateinischer Quadrate. Bull. sci. École polytechn. Timişoara **10**, 101—131 (1941).

Es wird eine neuartige Methode zur Bildung bisher unbekannter lateinischer Quadrate entwickelt. Diese sind solche zyklische Quadrate, bei denen nicht nur in jeder Zeile, sondern auch in jeder Spalte alle Elemente voneinander verschieden sind. n ist dabei immer als eine ungerade Primzahl vorausgesetzt. Trifft die Latinität auch für alle Haupt- und Nebendiagonalen zu, so nennt man das Quadrat pandiagonal. Je nachdem in zwei (und damit in allen vier), in einer oder keiner der vier Hauptrichtungen alle Reihen nach einheitlicher zyklischer Anordnung besetzt sind, unterscheidet man zyklische, halbzyklische und nicht-zyklische Quadrate. Die Arbeit beschäftigt sich mit der Bildung halbzyklischer pandiagonaler lateinischer Quadrate und gibt ein Verfahren an, wie man sie aus zyklischen pandiagonalen lateinischen Quadraten durch paarweise Seitenvertauschungen konstruieren kann. Bedeutet q die Zykuszahl, s die Anzahl der zur Vertauschung kommenden Seitenpaare und setzt man $\frac{q-1}{q+1} \equiv h \pmod{n}$, so wird man auf die Kongruenz $h^{2s} \equiv 1 \pmod{n}$ geführt als Bedingung dafür, daß durch die letzte Vertauschung die Latinität wieder hergestellt wird. Für den Fall $n = 13$, $q = 6$ wird ein halbzyklisches pandiagonales lateinisches Quadrat konstruiert, auch das allgemeine Verfahren entwickelt. Quadrate der gesuchten Art sind nur möglich für n der Form $2sk + 1$. Der kleinste mögliche Wert von n ist also 13. Es wird ferner die Anzahl der pandiagonalen zyklischen Quadrate bestimmt, die sich für die Zeilenvertauschungen eignen.

Für das genannte h gibt es $n - 2\varphi\left(\frac{n-1}{2}\right) - 3$ zulässige Werte. Durch Vertauschung in s -Zeilenpaaren erhält man im ganzen $n(n-1) \frac{\varphi(s)}{s}$ halbzyklische Quadrate. Weiter wird

gezeigt, daß man sämtliche Werte von h aus einem einzigen ableiten kann. Ein solcher ist gegeben, wenn man eine primitive Wurzel von n kennt. Für die Primzahlseitenlängen unter 50 wird eine Tabelle für die Werte von h und zugehörigen Werte von q gegeben. Das Problem der Vertauschung von Spaltenpaaren bringt nichts Neues, dagegen macht das der Vertauschung von parallelen Diagonalen eine besondere Bearbeitung erforderlich. Das entwickelte Verfahren, durch das kombinatorische Aufgaben auf die Lösung von Zahlenkongruenzen zurückgeführt werden, gestattet mannigfache Anwendungen und Erweiterungen, die in einer späteren Arbeit behandelt werden sollen. Insbesondere wird hingewiesen auf die Gewinnung neuartiger Lösungen des n -Königinnenproblems, zugehörige Anzahlbestimmungen, Symmetriecharakter der Lösungen, sowie auf die Bildung Eulerscher und pandiagonaler magischer Quadrate. Diese speziellen Probleme wurden vom Verf. für den Fall $s = 2$ bereits in einer früheren Arbeit [Nieuw Arch. Wiskde **19**, 257—271 (1938); dies. Zbl. **18**, 5] behandelt.

Naumann.

Moessner, Alfred: Verschiedene Diophantische Probleme und numerische Identitäten. Tôhoku Math. J. **47**, 188—200 (1940).

Xiroudakis, G., und K. Fassoulakis: Über einige diophantische Gleichungen höheren Grades. Bull. Soc. Math. Grèce **20**, 104—119 (1940) [Griechisch].

Vortrag, enthaltend einen Bericht über die Entwicklung der Lehre von den dio-

phantischen Gleichungen an Hand zahlreicher Beispiele klassischer diophantischer Probleme.

Bessel-Hagen (Bonn).

Xiroudakis, G., und K. Fassoulakis: Über den großen Fermatschen Satz. *Bull. Soc. Math. Grèce* **20**, 57—65 (1940) [Griechisch].

Die Gleichungen $x^4 + y^4 = z^4$ und $x^4 + y^5 = z^5$ werden mit einer eigentümlichen Methode behandelt, bei der das Problem darauf zurückgeführt wird, gewisse ganzzahlige Polynome zu Quadratzahlen zu machen.

Bessel-Hagen (Bonn).

Rosser, Barkley: A new lower bound for the exponent in the first case of Fermat's last theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46**, 299—304 (1940).

Verf. zeigt: Wenn p eine ungerade Primzahl ist und $a^p + b^p + c^p = 0$ eine Lösung in ganzen zu p teilerfremden Zahlen hat, so ist $p > 41\,000\,000$. Bei dem Beweise wird insbesondere gezeigt, daß die Lösbarkeit nur dann stattfinden könnte, wenn die Kongruenz $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ für jede Primzahl $m \leq 41$ erfüllt ist. Zum Schluß begründet Verf., warum es ihm unwahrscheinlich erscheint, daß sich durch Fortführung dieser Methoden eine beliebig hohe untere Schranke für die in Frage kommenden p gewinnen lasse.

Bessel-Hagen (Bonn).

Rosser, Barkley: An additional criterion for the first case of Fermat's last theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.* **47**, 109—110 (1941).

Ausdehnung des im vorstehenden Referat erwähnten Kriteriums auf $m \leq 43$.

Bessel-Hagen (Bonn).

Lehmer, D. H., and Emma Lehmer: On the first case of Fermat's last theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.* **47**, 139—142 (1941).

Durch numerische Anwendung verschiedener Kriterien, insbesondere der in den beiden vorstehenden Referaten besprochenen Kriterien von Rosser, gelangen die Verf. zu der Folgerung, daß der erste Fall des Fermatschen Theorems für alle $p < 253\,747\,889$ bewiesen ist.

Bessel-Hagen (Bonn).

Bitterlich-Willmann, Johann: Eine Verallgemeinerung der Fermatschen Vermutung. *J. reine angew. Math.* **183**, 251—252 (1941).

Auf Grund wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen werden folgende drei Vermutungen aufgestellt: „1. Die Lösungsanzahl $H(n, 2; M^n)$ der Gleichung $x^2 + y^2 = z^n$, wobei $z \leq M$, genügt der Limesbeziehung $\lim_{M \rightarrow \infty} H(n, 2; M^n) : M = C(n, 2)$ [$C(n, 2)$ bezeichnet eine nur von n abhängige Konstante]. 2. Die Lösungsanzahl $H(2, 3; M^2)$ der Gleichung $x^3 + y^3 = z^2$, wobei $z \leq M$, genügt der Limesbeziehung

$$\lim_{M \rightarrow \infty} H(2, 3; M^2) : \sqrt[3]{M} = C(2, 3)$$

[$C(2, 3)$ ist ebenfalls eine Konstante]. 3. Dies sind die einzig möglichen Zerlegungen einer n -ten Potenz in die Summe zweier k -ter Potenzen.“ (Wie Herr Holzer mitteilt, erweist sich die 3. Vermutung als falsch. *Redaktion.*) *Bessel-Hagen* (Bonn).

Wachs, Sylvain: Sur certains aspects analytiques du théorème de Fermat. *C. R. Acad. Sci., Paris* **211**, 55—57 (1940).

Pour démontrer le théorème de Fermat, il suffirait de prouver que dans le développement en série de puissances de la dérivée logarithmique d'un polynôme du troisième degré ayant pour racines les inverses de trois entiers, aucun des coefficients n'est nul. Aussi il suffirait de prouver que parmi les homologues d'un certain point M du plan projectif réel par les puissances successives d'une homographie H dont l'équation caractéristique a toutes ses racines distinctes et entières, aucun n'est situé sur un côté du triangle de référence. Enfin il suffirait de démontrer que si z est la puissance n -ième d'un nombre rationnel absolument inférieur à l'unité, les deux intégrales

$$\int_0^\infty t^{-2}(1 - e^{-zt^n})e^{-t^n} dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty t^{n-2}e^{-t^n} dt = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

sont incommensurables entre elles.

J. F. Koksma (Amsterdam).

Aigner, Alexander: Die Zerlegung einer arithmetischen Reihe in summengleiche Stücke. *Deutsche Math.* **6**, 77—89 (1941).

Eine arithmetische Reihe $a = a_1, a_2, \dots$ mit der Differenz d (a, d ganz rational, $d > 0$) soll in summengleiche Abschnitte zerlegt werden, also derart, daß $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=k+1}^n a_i$ ist. Es kann $(a, d) = 1$ angenommen werden. Verf. nennt eine solche Reihe zweiteilig. — Verf. zeigt in § 1: (1) Ist $2a > d$, so gibt es immer unendlich viele Lösungspaare (n, k) . Sie bestimmen sich nach der Formel $x + y\sqrt{2} = (2a - d)(1 + \sqrt{2})^{2h+1}$; dabei ist h eine natürliche Zahl mit $(1 + \sqrt{2})^{2h} \equiv 1 \pmod{d}$. I. a. sind damit noch nicht alle Lösungen erschöpft. — (2) Ist $2a < d$, so sind die Fälle recht verwickelt. Ist $a < -3d$, so treten möglicherweise unendlich viele, endlich viele Lösungen oder gar keine Lösung auf, für $-3d \leq a < d/2$ nur entweder unendlich viele Lösungen oder keine. Hier seien nur einige Teilergebnisse angeführt, wobei bemerkt werde, daß Verf. von der vollständigen Lösung noch weit entfernt ist: Gilt für jede ungerade Primzahl $p|d$ entweder durchweg $p \equiv 3 \pmod{8}$ oder durchweg $p \equiv 5 \pmod{8}$, und ist überdies d nicht durch 4 teilbar, so gibt es für jedes $a < d/2$ unendlich viele Lösungen. Hat d mindestens einen Teiler $\equiv 7 \pmod{8}$ oder ist d durch 4 teilbar oder auch dies beides erfüllt, so gibt es unendlich viele $a < d/2$, so daß keine Lösung existiert, aber auch unendlich viele, so daß es wenigstens endlich viele zugehörige Lösungen gibt. — Schließlich sei bemerkt, daß es für $a = d/2$, also für die Reihe $1, 3, 5, \dots$ keine Lösung gibt. — Verf. bespricht in § 2 daran anschließende Grenzwertfragen. h durchläuft bei der in § 1, (1) gegebenen i. a. nicht vollständigen Lösung alle Vielfachen seines kleinsten Wertes h_0 . Da n und k durch h bestimmt sind, seien für $h = xh_0$ zu n und k die Zahlen $N = f((x+1)h_0)$, $K = g((x+1)h_0)$ bestimmt, wobei die Funktionen f und g sich aus $n = f(h)$, $k = g(h)$ ergeben. Verf. beweist: $\lim n/k = \sqrt{2}$, $\lim (n - k\sqrt{2}) = \{(2a - d)/2d\}(\sqrt{2} - 1)$. (Man bedenke, daß mit h auch n und k ins Unendliche wachsen.) Weiter wird $\lim N/n = \lim K/k = \lim a_N/a_n = \lim a_K/a_k = (1 + \sqrt{2})^{2h_0+1}$. I. a. sind, wenn nicht nur die Lösungen aus § 1 (1), sondern alle Lösungen herangezogen werden, die analog gebildeten Folgen divergent. — § 3 behandelt $a = d = 1$, also die natürliche Zahlenreihe. Hier ist die in § 1, (1) gegebene Lösung die vollständige. Verf. bespricht dann noch den Zusammenhang der bezüglichen Grenzwertfragen mit der Teilung der durch $\int_0^n x dx$ dargestellten Fläche in zwei gleiche Teile. — § 4 zeigt zunächst, daß die analoge Annahme drei- und mehrteiliger Reihen unmöglich ist. Dreiteilige Reihen würden erfordern, daß es eine arithmetische Reihe aus vier Quadraten natürlicher Zahlen gibt. Schon Euler (*Commentationes arithmeticae*) hat dies als unmöglich bewiesen. Verf. gibt einen kurzen Beweis. — Zuletzt zeigt Verf., daß der Fall beliebiger reeller oder komplexer a, d (natürlich immer $d \neq 0$) sich auf den besprochenen Fall ganzzahliger primer a, d ($d > 0$) zurückführen läßt.

Holzer (Wien).

Borel, Émile: Applications du calcul des probabilités aux problèmes concernant les nombres premiers. *Théorème de Goldbach*. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **212**, 317—320 (1941).

Rapport sur des recherches statistiques variées sur les nombres premiers que l'auteur a entreprises, il y a quelques années. Sa conclusion générale est la suivante: Soit E un ensemble fini de nombres entiers; soient N leur nombre, A et B leurs limites inférieure et supérieure; on supposera $B < A + \sqrt{A}$; soit f la fréquence moyenne des nombres premiers dans l'intervalle $B - A$; le nombre probable des nombres premiers de l'ensemble E est Nf . Si la définition de l'ensemble E , jointe aux propriétés arithmétiques les plus élémentaires, n'entraîne pas la conséquence que le nombre réel n des nombres premiers de E doive être inférieur ou supérieur à $Nf = \nu$, on a le droit d'appliquer le théorème de Poisson et d'affirmer que la probabilité pour que ce nombre (des nombres premiers de E) soit égal à n est $p'_n = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu}$. En appliquant ses méthodes au théorème de Goldbach l'auteur aboutit à ce résultat: Tout nombre pair $2a$ est la somme de deux nombres premiers dont l'un est inférieur à $50 (\log a)^3$. La probabilité pour que cet énoncé soit faux est inférieur à 10^{-50} . Bessel-Hagen.

Habermetzle, Mary: On some partition functions. *Amer. J. Math.* **63**, 589—599 (1941).

Es seien p, q zwei verschiedene Primzahlen; a_m ($m = 1, 2, \dots$) sei die Anzahl der Zerlegungen von m in Summanden, die weder durch p noch durch q teilbar sind, $a_0 = 1$. Niven [*Amer. J. Math.* **62**, 353—364 (1940)] hat den Fall $p = 2, q = 3$ behandelt.

Verf. betrachtet den Fall, daß die Zahl $\mu = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ ganz ist; sie findet $a_m = 2\pi \sum_{k=1}^* \sum_{n=0}^{\mu-1} a_n B_{k,n}(m) L_{k,n}(m)$; dabei läuft k in \sum^* nur über die k mit $(k, pq) = 1$ oder $= pq$; im ersten Falle setze man $\varepsilon = pq$, im zweiten $\varepsilon = 1$. Weiter ist (Klostermansche Summe)

$$B_{k,n}(m) = \sum_h \exp\left(-\frac{2\pi i h}{k}(m-\mu) + \frac{2\pi i h'}{k\varepsilon}(n-\mu)\right),$$

wo h über ein reduziertes System modulo k läuft und h' den Bedingungen $hh' \equiv -1 \pmod{k}$, $h' \equiv 0 \pmod{\varepsilon}$ genügt. Endlich ist

$$L_{k,n}(m) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\mu-n}{\varepsilon(m-\mu)}} I_1\left(\frac{4\pi}{k} \sqrt{\frac{(\mu-n)(m-\mu)}{\varepsilon}}\right), \quad \text{wo} \quad I_1(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{2\alpha+1}}{\alpha!(\alpha+1)!}$$

eine Besselsche Funktion mit rein imaginärem Argument ist. Wegen der Methode vgl. Rademacher (dies. Zbl. 18, 246). Jarník (Prag).

Wintner, Aurel: On the lattice problem of Gauss. Amer. J. Math. 63, 619–627 (1941).

Bezeichnungen: $n > 0$ ganz, $\varepsilon > 0$, $r(n)$ ist die Anzahl der ganzen Zahlenpaare a, b mit $a^2 + b^2 = n$, $P(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} r(n) + 1 - \pi x$,

$$Q(t) = P(t^2) \cdot t^{-\frac{1}{2}}, \quad \Phi(\gamma) = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2(n)}{n^{3/2}} \cos(2\pi \sqrt{n\gamma}).$$

Resultate: I. Für reelles λ ist

$$\int_1^T e^{i\lambda t} Q(t) dt = \frac{\pm i r(n)}{2\pi n^{3/4}} \exp\left(\pm \frac{1}{4} i \pi\right) \cdot T + o(T)$$

für $\lambda = \pm 2\pi n^{1/2}$, $= o(T)$ sonst. — II. $\int_1^T Q^2(t) dt = \frac{2}{3} \Phi(0) T + o(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$. — Aus

I, II folgt, daß $Q(t)$ für $t \geq 1$ fastperiodisch (B^2) ist; ihre Fourierreihe ist aus I abzulesen. — Es wird noch die Fastperiodizität der zum Waringschen Problem gehörigen singulären Reihe hervorgehoben. — Zu II: Verf. ist der (triviale) Übergang

von der bekannten Formel $\int_1^T Q^2(t) t^2 dt = \frac{1}{2} \Phi(0) T^3 + o(T^{\frac{3}{2}+\varepsilon})$ (Cramér) zu II ent-

gangen, der sich z. B. in der Arbeit des Ref. in Rozprawy 34 (1925), Nr 27 (Hilfssatz 1) befindet. Dasselbst findet man sogar allgemeiner

$$\begin{aligned} \int_1^T Q(t + \alpha) Q(t + \beta) dt &= \frac{2}{3} \Phi(\alpha - \beta) T + o(T^\varepsilon), \\ \int_1^T (Q(t) \mp Q(t + \alpha))^2 dt &= 3(\Phi(0) \mp \Phi(\alpha)) T + o(T^\varepsilon) \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0) \end{aligned}$$

mit einigen Folgerungen über die Verschiebungseigenschaften von $Q(t)$. — Druckfehler: in (12) lies $f_n(x+1) - f_n(x)$ statt $f_n(x)$; ähnlich in (13). In (23), (24) lies dreimal $2\pi n^{1/2}$ statt $n^{1/2}$; S. 625, vorletzte Zeile soll das i im Zähler stehen. Jarník.

Tietze, Heinrich: Über die Anzahl komprimierter Gitterpunktmengen von gegebener Punktezahl. Math. Z. 47, 352–356 (1941).

Vgl. Verf., Komprimierte Gitterpunktmengen (dies. Zbl. 25, 108). Es sei $P^n(m)$ die Anzahl aller komprimierten Gitterpunktmengen \mathfrak{S}_m^n von der Dimension n und vom Grad m . $P^2(m)$ ist dann die Anzahl der Partitionen der Zahl m . Es sei $d = d(\mathfrak{S}_m^n)$ die Anzahl der Koordinaten x_v von Punkten in \mathfrak{S}_m^n , bei denen Werte > 1 auftreten.

Es sei $P^{n,d}(m)$ die Anzahl aller \mathfrak{S}_m^n , für die $d(\mathfrak{S}_m^n) = d$ ist. Dann ist $P^n(m) = \sum_{d=0}^{m-1} P^{n,d}(m)$ und $P^n(m) = \sum_{d=0}^{m-1} \binom{n}{d} P^{d,d}(m)$. Daraus ergibt sich, daß $P^n(m)$ ein Polynom in n vom

Grad $m - 1$ ist. Es gilt ferner: $P^n(m) = \sum_{v=0}^{m-1} (-1)^{m-1-v} \binom{n}{v} \binom{n-v-1}{m-v-1} P^v(m)$. Daraus folgt, daß sich $P^n(m)$ durch $P^v(m)$ ($v = 1, \dots, m - 1$) ausdrücken läßt. Durch eine weitere Formel ergibt sich eine Darstellung von $P^n(m)$ durch $P^v(m)$ ($v = 1, \dots, m - 2$).
Hofreiter (Wien).

Hajós, Georg: Über einfache und mehrfache Bedeckung des n -dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. Math. Z. 47, 427—467 (1941).

Verf. beweist die Minkowskische Vermutung. Diese besagt bekanntlich arithmetisch: In einem unimodularen System von n linearen homogenen Formen kann man durch ganzzahlige nichttriviale Wahl der n Veränderlichen alle Formen unter 1 heruntersetzen, wenn nicht wenigstens eine Form lauter ganzzahlige Koeffizienten hat. Die Vermutung besagt geometrisch: In einer gitterförmigen lückenlosen Erfüllung des n -dimensionalen Raumes mit Würfeln gibt es immer Würfelpaare, die eine ganze Seitenfläche gemein haben. Furtwängler gab ihr die gruppentheoretische Fassung: Hat eine Abelsche Gruppe die Erzeugenden A_1, \dots, A_n und sind ihre Elemente eindeutig in der Gestalt $A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}$ ($0 \leq \alpha_i \leq a_i - 1$) darstellbar, so ist für mindestens ein A_i : $A_i^{a_i} = 1$. Verf. beweist die Vermutung in dieser dritten Fassung mit rein gruppentheoretischen und gruppenalgebraischen Methoden. Den Induktionsschluß führt er nicht nach n , sondern nach der Anzahl der Primteiler von $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ (mehrfache mehrfach gezählt). — Für eine entsprechende, wohl auf Furtwängler zurückgehende Vermutung über mehrfache Bedeckung des Raumes gibt Verf. ein Gegenbeispiel.
Ott-Heinrich Keller (Flensburg-Mürwik).

Hofreiter, N.: Gitterförmige lückenlose Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln. Mh. Math. Phys. 50, 48—64 (1941).

Man kann die Minkowskische Vermutung so aussprechen: In einer gitterförmigen lückenlosen Ausfüllung des R_n mit kongruenten Würfeln gibt es neben dem Würfel mit dem Mittelpunkt $(0, 0, \dots, 0)$ einen, dessen Mittelpunkt eine Koordinate 1, die übrigen 0 hat. Verf. beweist dies erneut für $n \leq 9$. Er betrachtet dazu alle dem Nullwürfel benachbarten Würfel und greift denjenigen heraus, dessen Mittelpunkt eine möglichst große Zahl r von von 0 verschiedenen Koordinaten hat. Er ordnet die zu beweisenden Fälle nach der Größe von r . Neuerdings hat Hajós (siehe vorsteh. Ref.) die Vermutung für allgemeines n bewiesen. Ott-Heinrich Keller (Flensburg-Mürwik.)

Analysis.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Tietz, A.: Angenäherte Berechnung n -facher Integrale. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 423—463 u. dtsh. Zusammenfassung 463—464 (1940) [Russisch].

L'au. étudie les formules de quadratures des intégrales multiples

$$\int_0^1 \omega(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sum_{i=1}^m \lambda_i \omega(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) + R,$$

où $M_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$, sont des points situés dans le domaine $0 \leq x_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Il considère d'abord le cas où ω est un polynome ($R = 0$) et en choisissant les points M_i il obtient différentes formules plus ou moins commodes pour les calculs. Des généralisations des formules pour une variable de Cotes, Gauss et Tchebycheff au cas de plusieurs variables sont aussi indiquées. N. Obreschkoff.

Boas jr., R. P.: A general moment problem. Amer. J. Math. 63, 361—370 (1941).

Soit $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, un système de fonctions définies dans l'intervalle $(0, 1)$. L'au. introduit les conditions suivantes: (R_p) pour chaque suite $\{c_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, il existe une fonction $f(x)$ de la

classe $L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$ telle que

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq M \left(\sum_1^\infty |c_n|^p \right)^{1/p}, \quad c_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx.$$

(B_p) Si $f(x) \in L_p$ alors on a

$$\left(\sum_1^\infty \left| \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \right|^{p'} \right)^{1/p'} \leq N \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$$(\varrho_p) \quad \left(\int_0^1 \sum c_n \varphi_n(x) |^p dx \right)^{1/p} \geq \mu (\sum |c_n|^{p'})^{1/p'},$$

$$(\beta_p) \quad \left(\int_0^1 \sum c_n \varphi_n(x) |^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq \nu (\sum |c_n|^p)^{1/p},$$

$$(A_p) \quad \left| \sum \sum' c_m d_n \int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx \right| \leq \alpha (\sum |c_n|^p)^{1/p} (\sum |d_n|^{p'})^{1/p'}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

pour des suites arbitraires c_n et d_n . M, N, μ, ν sont des constantes dépendantes seulement du système $\{\varphi_n(x)\}$. Il démontre les théorèmes: 1. R_p et ϱ_p pour $1 \leq p < \infty$ sont équivalentes et B_p et β_p pour $1 \leq p \leq \infty$ sont aussi équivalentes. Par un exemple il montre que dans la première partie du théorème 1. le cas $p = \infty$ doit être exclu. 2. Si $1 \leq p < \infty$ alors A_p et β_p entraînent la condition ϱ_p . 3. Si $1 < p \leq 2$ et $|\lambda_n - n| \leq \delta \leq \frac{p-1}{48+36\pi}$ la suite $\{e^{2\pi i \lambda_n x}\}$ satisfait à R_p . *N. Obreschkoff* (Sofia).

Lozinski, S.: Über trigonometrische Interpolation. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 229—246 u. dtsh. Zusammenfassung 246—248 (1940) [Russisch].

L'auteur généralise un théorème de Marcinkiewicz [Studia Math. 6, 1—17, 67—81 (1936); ce Zbl. 16, 19] en démontrant le théorème: Soit $\varphi(u)$ une fonction non décroissante pour $u \geq 0$, convexe, $\varphi(0) = 0$, et désignons par $x_k = x_k^{(n)}$ les nombres

$x_n = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, \dots, 2n+1$. Pour chaque polynôme trigonométrique $P(x)$ de degré n on a $\frac{2k\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} \varphi\{|P(x_k)|\} \leq \int_0^{2\pi} \varphi\{4|P(x)|\} dx$. Ensuite il démontre quelques

résultats pour le polynôme trigonométrique d'ordre $U_n(f; x)$ qui coïncide avec la fonction $f(x)$ dans les points $x_k^{(n)}$, la fonction $f(x)$ étant bornée dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. C'est une généralisation de certains résultats de Marcinkiewicz pour la convergence en moyenne des polynômes $U_n(f; x)$ vers $f(x)$ si cette fonction a seulement des points discontinus de la première espèce; et aussi la convergence de la dérivée $U'_n(f; x)$. Citons encore le résultat: Soit la fonction $f(x)$ R -intégrable dans $(0, 2\pi)$ et soit la fonction $g(x)$ de variation bornée dans le même intervalle. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} U_n(f; x) g(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

N. Obreschkoff (Sofia).

Nikolsky, S. M.: Estimations of the remainder of Fejér's sum for periodical functions possessing a bounded derivative. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 31, 210—214 (1941).

Supposons que $f(x)$ appartienne à une certaine classe \mathcal{M} de fonctions continues et $U_n(f; x)$ soit l'expression de l'approximation pour le point x . Désignons par $\mathcal{E}_{U_n}(\mathcal{M}, x) = \sup |f(x) - U_n(f; x)|$ la borne supérieure de $|f(x) - U_n(f; x)|$ pour toutes les fonctions de la classe \mathcal{M} . Désignons encore par $KW^{(r)}$ la classe des fonctions périodiques de période 2π , qui possèdent des dérivées d'ordre $r-1$ absolument continues et presque partout des dérivées d'ordre r uniformément bornées, $|f^{(r)}(x)| \leq K$ aux

points d'existence. Pour les sommes de Fejér $\sigma_n(f; x)$ l'auteur démontre les formules:

$$\mathcal{E}_{\sigma_n}(KW^{(r)}; x) = \frac{2K}{\pi} \frac{\log n}{n} + O(n^{-1}),$$

$$\mathcal{E}_{U_n}(KW^{(r)}; x) = \frac{4K}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^2} + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right), \quad r > 1.$$

Il obtient aussi des résultats analogues pour l'interpolation trigonométrique.

N. Obreschkoff (Sofia).

Nikolsky, S. M.: An asymptotic estimation of the remainder under approximation by interpolating trigonometric polynomials. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **31**, 215—218 (1941).

Soit $T_n(x)$ le polynôme trigonométrique d'ordre n qui coïncide avec la fonction périodique $f(x)$ de période 2π aux points $x_k^{(n)} = \frac{2\pi k}{2n+1}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$.

En gardant les symboles de la note précédente désignons par $KH^{(\alpha)}$ la classe des fonctions périodiques de période 2π , qui satisfont à la condition de Lipschitz de degré α ($0 < \alpha \leq 1$), $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\alpha$. Les résultats suivants sont obtenus:

$$\mathcal{E}_{T_n}(KH^{(\alpha)}; x) = \frac{K \log n}{\pi^{1-\alpha} n^\alpha} \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right| + O(n^{-\alpha}),$$

$$\mathcal{E}_{T_n}(KW^{(r)}; x) = \frac{8}{\pi^2} A_r \frac{K \log n}{n^r} \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right| + O(n^{-r}), \quad A_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

N. Obreschkoff (Sofia).

Kiang, Süe-yung: Über die Fouriersche Entwicklung der singulären Funktion bei einer Lebesgueschen Zerlegung. Math. Z. **47**, 330—342 (1941).

Es sei $f(\vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, eine nicht abnehmende beschränkte Funktion und $V = f(2\pi - 0) - f(0 + 0)$. Es seien a_0, a_n, b_n , $n = 1, 2, \dots$, die Euler-Fourierschen

Koeffizienten der Funktion $f(\vartheta)$. Wie bekannt, ist $V = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{r=1}^n b_r \right) : \log n$, d. h. V

kann mittels eines einfachen Algorithmus aus der Koeffizientenfolge a_n, b_n , $n = 1, 2, \dots$, berechnet werden. Es sei $f(\vartheta) = T(\vartheta) + S(\vartheta)$ die Lebesguesche Zerlegung der Funktion $f(\vartheta)$, d. h. $T(\vartheta)$ eine nicht abnehmende totalstetige Funktion und $S(\vartheta)$ eine nicht abnehmende „singuläre“ Funktion [die Lebesguesche Zerlegung ist unter der Bedingung $S(0) = 0$ eindeutig, und es gilt in $(0, 2\pi)$ fast überall $S'(\vartheta) = 0$]. Ist $v = S(2\pi - 0) - S(0 + 0)$, dann gilt $0 \leq v \leq V$, und die Funktion $f(\vartheta)$ ist totalstetig dann und nur dann, wenn $v = 0$. Verf. stellt aus der Koeffizientenfolge a_n, b_n , $n = 1, 2, \dots$, einen Algorithmus zur Berechnung von v auf. Er stützt sich dabei auf die bekannten Resultate von C. Carathéodory und L. Fejér über die positiven harmonischen Funktionen und ihre Euler-Fourierschen Koeffizienten [Rend. Circ. mat. Palermo **32**, 218—239 (1911)] und u. a. auf den folgenden Hilfssatz: Ist $g(\vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, eine L -integrierbare Funktion und C die Menge der L -integrierbaren Funktionen $h(\vartheta)$,

für die $0 \leq h(\vartheta) \leq 1$, $\int_0^{2\pi} h(\vartheta) d\vartheta = \varepsilon$ gilt, dann gibt es eine Funktion $h^*(\vartheta)$ aus C , so daß $\int_0^{2\pi} h^*(\vartheta) g(\vartheta) d\vartheta = \max_{h(\vartheta) \in C} \int_0^{2\pi} h(\vartheta) g(\vartheta) d\vartheta = \eta(\varepsilon)$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0$ ist. L. Cesari.

Funktionentheorie:

Curtiss, J. H.: Necessary conditions in the theory of interpolation in the complex domain. Ann. of Math., II. s. **42**, 634—646 (1941).

C sei eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge der komplexen z -Ebene und A_C die Klasse der auf C eindeutigen analytischen Funktionen $f(z)$. Die Punkte der Menge M : $\alpha_\nu^{(n)}$, $\nu \leq n$; $n = 1, 2, \dots$ sollen nur Häufungspunkte besitzen, welche auf C liegen. Eine jede Funktion $f(z) \in A_C$ ist dann an den Stellen $\alpha_\nu^{(n)}$; $\nu = 1, 2, \dots, n$

für $n > n(f)$ eindeutig und regulär. Durch Interpolation von $f(z)$ in den Punkten $\alpha_\nu^{(n)}$; $\nu = 1, 2, \dots, n$ mit $n > n(f)$ läßt sich ein Polynom $L_n(z; f)$ vom Grade höchstens $n - 1$ finden. Von Fejér, Kalmár und Walsh (vgl. J. L. Walsh, dies. Zbl. 13, 59) wurden sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Folge $\{L_n(z; f)\}$ unter gewissen Voraussetzungen über C auf C gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Um notwendige Bedingungen für die Konvergenz der Polynomfolge $\{L_n(z; f)\}$ zu erhalten, gehen Kalmár und Walsh davon aus, daß nur dann für alle Funktionen $f(z) \in A_C$ die zugehörige Folge $\{L_n(z; f)\}$ auf C gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert, wenn dies insbesondere für die Funktionen $f(z)$ einer bestimmten Unterklasse A'_C von A_C der Fall ist. A'_C besteht aus den Funktionen $f(z) = 1/(z - t)$, worin t eine nicht auf C liegende Stelle bedeutet. Die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{L_n(z; f)\}$ für jede Funktion $f(z) \in A'_C$ gegen $f(z)$ auf C kann man nun, wie Verf. zeigt, durch die viel schwächere Forderung ersetzen, daß für eine einzige beliebige Stelle z_0 auf C $\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n(z_0; f)|^{1/n} \leq 1$, $f(z) \in A'_C$ erfüllt ist. *Lammel (Prag).*

Boas jr., R. P.: Expansions of analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 48, 467—487 (1940).

Erweiterte Fassung und ausführliche Beweise von Sätzen, welche Verf. bereits in einer früheren Note [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 139—143 (1940); vgl. dies. Zbl. 23, 141] auszugsweise mitgeteilt hat. *Lammel (Prag).*

Hille, Einar: A class of differential operators of infinite orders. 1. Duke math. J. 7, 458—495 (1940).

δ_z sei der Hermite-Webersche Differentialoperator 2. Ordnung

$$\delta_z = z^2 - \frac{d^2}{dz^2} \quad \text{und} \quad \delta_z^k = \delta_z \cdot \delta_z^{k-1}.$$

$G(w) = \sum g_\sigma w^\sigma$ sei eine ganze transzendente Funktion der Klasse $\mathfrak{G}_{\sigma, \beta}$ (d. h. höchstens vom Typus β zur Wachstumsordnung σ). Verf. bildet den Differentialoperator unendlich hoher Ordnung $G(\delta_z) = \sum g_\sigma \delta_z^\sigma$ und untersucht jene Zuordnung von Funktionen, welche bei Anwendung dieses Operators auf den Raum aller analytischen Funktionen $f(z)$ oder auf gewisse Teile davon — z. B. Klassen ganzer Funktionen — entsteht. Er sagt von einer Funktion $f(z)$, sie gestatte $G(\delta_z)$, oder G sei auf f anwendbar, wenn die Reihe

$$(*) \quad G(\delta_z)f(z) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} g_\sigma \delta_z^\sigma f(z) = h(z; f, G)$$

innerhalb jedes Regularitätsgebiets \mathfrak{D} von $f(z)$ gleichmäßig konvergiert, also eine in \mathfrak{D} reguläre Funktion darstellt; diese heiße $h(z, f, G)$, kurz $h(z)$. — Die vorliegende Arbeit gibt als erste einer geplanten Reihe: erstens technische Hilfsmittel, zweitens Aussagen über Anwendbarkeit von Operatornklassen auf Operandenklassen, und drittens eine erste, grobe Kennzeichnung der funktionentheoretischen Eigenschaften der Operationsergebnisse h in Abhängigkeit von denen von Operator G und Operand f . — 1. Auf Grund der Cauchyschen Integralformel ergeben sich Darstellungen von $\delta_z^k f(z)$ durch k -fache Integrale, welche aber unter geeigneten Umformungen auf eine feste Anzahl m von Integrationen zurückgeführt werden können. Anwendung auf $\delta_z^k z^n$ liefert gewisse Polynome, und weiter Reihen bzw. Doppelreihen nach diesen Polynomen für $\delta_z^k f(z)$ und $G(\delta_z)f(z)$. Die Konvergenzverhältnisse sind dabei aber noch nicht durchsichtig geworden und die Integraldarstellungen erweisen sich bislang als das zugkräftigere Mittel; insbesondere liefern sie eine Reihe wichtiger Abschätzungen für $\delta_z^k f(z)$ in Abhängigkeit von k , und diese wieder gestatten die für die Anwendbarkeitssätze erforderlichen Einsichten zur Konvergenz bei (*). Sie legen die Be-

trachtung des Funktional $F_\sigma(z; f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\delta f(z)}{\Gamma(1 + k/\sigma)} \right|^{\frac{1}{2k}}$ in Verallgemeinerung von $\Phi_\sigma(z; f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(k)}(z)}{\Gamma(1 + k/\sigma)} \right|^{\frac{1}{k}}$ in der Theorie der Operatoren $\frac{d}{dz}$ und $G\left(\frac{d}{dz}\right)$ nahe. — 2. Der Kern der Arbeit betrifft notwendige und hinreichende Bedingungen, welche

bei gegebener Klasse \mathfrak{F} von Operanden lehren, wie umfassend die Klasse \mathfrak{G} der auf \mathfrak{F} im obigen Sinne anwendbaren Operatoren ist. So gestattet z. B. die Klasse \mathfrak{F} aller analytischen Funktionen, die und nur die Operatoren $G(w)$ bei $w = \delta_z$, welche aus ganzen Funktionen der Klasse $\mathfrak{G}_{1,0}$ entstehen, d. h. höchstens vom Minimaltypus der Ordnung $\frac{1}{2}$ sind. Die Zuordnung ist dann sogar eine stetige Transformation in folgendem Sinne: Ist $f(z)$ regulär in \mathfrak{D} und liegen alle Γ und G in $\mathfrak{G}_{1,0}$, so folgt aus gleichmäßiger Konvergenz $\Gamma_n(z) \rightarrow G(z)$ innerhalb \mathfrak{D} , daß auch $\Gamma_n(\delta_z)f(z) \rightarrow G(\delta_z)f(z)$ innerhalb \mathfrak{D} gilt; dies unter der Voraussetzung, daß ein festes $\Gamma_0(z)$ vorhanden ist, für das die Maximalbeträge $M(r, \Gamma_n) \leq M(r, \Gamma_0)$ bleiben (sog. dominante Konvergenz). Ist $f(z)$ ganz transzendent aus der Klasse $\mathfrak{F}_{\sigma, \alpha}$ (wie eingangs erklärt), so gestattet es alle Operatoren zu ganzen transzendenten $G(w)$ aus $\mathfrak{G}_{\sigma, \beta}$, wobei σ, β mit ϱ, α durch Ordnungs- und Typenbeziehungen verknüpft sind: a) für $\varrho \leq 2$ ist $\sigma = 1$; b) für $\varrho > 2$

ist σ aus $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2\sigma} = 1$ und dann β aus $(\varrho\alpha)^{\frac{1}{\varrho}} \cdot (2\sigma\beta)^{\frac{1}{2\sigma}} = 1$ zu bestimmen. — 3. Es folgt eine erste grobe Überprüfung der funktionentheoretischen Struktur der Transformationsergebnisse $h(z; f, G)$ in Abhängigkeit von f und G . Ordnung und Typus von h können auf Ordnungen und Typen von f und G zurückgeführt werden. — 4. Endlich wird durch eine Kette von Beispielen und Gegenbeispielen geklärt, wo gegebene Bedingungen als endgültig und wo sie als verbesserungsfähig oder sogar verbesserungsbedürftig anzusehen sind. Einige Ausblicke beschließen die Arbeit: Besonders wird als Ergebnis angezeigt, daß die Theorie der Anwendbarkeit auf beliebige Operatoren Δ_z^2 zweiter Ordnung an Stelle des Hermite-Weberschen δ_z , ja sogar auf solche von n -ter Ordnung $\Delta_z^{(m)}$ übertragen werden könne; die Klasse aller analytischen Funktionen gestatte dann genau die Operatoren $G(\Delta_z^{(m)})$ unendlicher Ordnung zu den ganzen Funktionen G der Klasse $\mathfrak{G}_{\frac{1}{n}, 0}$. — Weitere Abhandlungen zum Thema sind angekündigt.

Ullrich (Gießen).

Onofri, Luigi: Sugli zeri della derivata di una funzione quasi intera con due punti singolari. Atti Accad. Italia, Mem. 12, 311—334 (1941).

L'auteur étudie en détail les zéros de la dérivée $f'(z)$ d'une fonction quasi entière $f(z)$ réelle, admettant 0 et ∞ pour points essentiels, de genre fini, lorsque les zéros de $f(z)$, sauf un nombre fini $2q$ d'entre eux, sont réels. Il complète ainsi des résultats de Maillet [J. Math. pures appl., V. s. 8, 329—386 (1902)] relatifs au cas de l'ordre inférieur à 2 [Pour la généralisation du résultat de Maillet au genre quelconque, voir Valiron, Bull. Sci. math. 46, 436 (1922), Note du Réf.]. Le théorème de Rolle fournit entre deux zéros consécutifs de $f(z)$ un zéro au moins de $f'(z)$, l'un peut être considéré comme donné par le théorème de Rolle. Le résultat principal est: p étant le genre, le nombre total des zéros réels qui ne sont pas donnés par le théorème de Rolle et des zéros complexes de $f'(z)$ est au plus égal à $2p + 2q + 2$. Cette limite s'abaisse d'une unité lorsque tous les zéros réels de $f(z)$ sont de même signe ou lorsque la décomposition de $f(z)$ en facteurs primaires de Weierstrass se fait sous certaines formes simples. Dans ces cas et lorsque tous les zéros de $f(z)$ sont réels de même signe, ou lorsque ceux tendant vers l'infini et ceux tendant vers zéro ont respectivement le même signe, l'auteur donne des propriétés des arguments des zéros complexes de $f'(z)$. Il précise ses résultats dans le cas des genres zéro et un. G. Valiron (Paris).

Monna, A. F.: Quelques applications de la théorie moderne du potentiel aux fonctions holomorphes. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 718—726 (1941).

Durch Anwendung neuerer Ergebnisse über das Dirichletsche Problem und über subharmonische Funktionen werden einige Sätze aus der Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen erweitert. Die Verallgemeinerungen beziehen sich auf das Schwarzsche Lemma, die Formel von Poisson-Jensen (sie führt zu einer Erweiterung des Nevanlinna-Ostrowskischen Satzes und des Phragmén-Lindelöfschen Theorems) und auf die Darstellung analytischer Funktionen, die im Einheitskreis (allgemeiner in einem Gebiet G) beschränkt sind.

Wittich (Göttingen).

Spencer, D. C.: On mean one-valent functions. Ann. of Math., II. s. 42, 614—633 (1941).

L'auteur donne les démonstrations des résultats annoncés dans un article antérieur [J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 20, 124—126 (1941); ce Zbl. 24, 220]. Il discute en détail au moyen d'exemples la nécessité de certaines de ses hypothèses.

G. Valiron (Paris).

Spencer, D. C.: On finitely mean valent functions. 2. Trans. Amer. Math. Soc. 48, 418—435 (1940).

Die im Einheitskreis reguläre Funktion $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ sei im Mittel p -wertig, d. h. die Riemannsche Bildfläche \mathfrak{B} habe für alle $R > 0$ über $|w| \leq R$ nur ein Flächenstück vom euklid. Inhalt $\mathfrak{B}(R) \leq p \cdot \pi R^2$.

In einer Arbeit in den Proc. London Math. Soc. (die uns noch nicht zugänglich war) hat Verf. diesen Begriff eingeführt und eine Reihe von Aussagen auf die neuerklärte Funktionenklasse ausgedehnt, welche bei p -wertigen Funktionen bekannt waren. Mittlere p -Wertigkeit von $f(z)$ zieht die von $\{f(z^k)\}^{1/k}$ nach sich; aber aus der mittleren p -Wertigkeit von $f_k(z) = a_1 z + a_{k+1} z^{k+1} + a_{2k+1} z^{2k+1} + \dots$ für $k > 1$ folgt nicht die von $f_k(z^{1/k})^k$, einer Funktion der Gestalt $f_1(z)$, abweichend von den Verhältnissen bei p -Wertigkeit selbst. Gestützt auf den Ahlforsschen Randverzerrungssatz und einen Vorgang bei Cartwright im Sonderfall studiert Verf. das Wachstum der im Mittel p -wertigen Funktionen und schätzt den Maximalbetrag $M(r, f_k)$ sowie die Taylorkoeffizienten. In der Hauptsache wird dann das Randverhalten von $f(z)$ auf Wegen untersucht, die in einen Punkt $e^{i\theta}$ des Einheitskreises (kurz θ) münden. Zu jedem Punkt einer vorgelegten Menge $\{\theta\}$ solcher Punkte gibt es mindestens einen in θ mündenden Weg, auf dem

$$\lim (1 - r)^{\alpha(\theta)} |f(z)| > 0 \quad \text{gilt, mit} \quad \sum_{\{\theta\}} \alpha(\theta) \leq 2p.$$

Ist längs eines in θ mündenden Weges $f(z)$ beschränkt, so gilt für alle nach θ mündenden Wege

$$\overline{\lim} (1 - r)^{2p} |f(z)| = 0.$$

Und beides sind Bestaussagen. Nicht alle Sätze bedürfen der in der Definition geforderten Schärfe: Teils genügt es $R > R_0$ vorauszusetzen, oder nur $\overline{\lim} W(R) : \pi R^2 \leq p$ zu fordern, oder wie im folgenden Satze auch auf festes p zu verzichten: Ist für alle $R < \infty$ auch $\mathfrak{B}(R) < \infty$, so sind die Häufungsbereiche für zwei Wege, die nach θ münden, nie punktfremd. — Vgl. auch die Ergebnisse des Verf. über mittlere Schlichtheit, $p = 1$ (dies. Zbl. 24, 220, 221).

Ulrich (Gießen).

Denjoy, Arnaud: Sur la représentation conforme. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 1071—1074 (1941).

Eine auf die Schwarzsche Ungleichung begründete Abschätzung führt zu folgenden bemerkenswerten Feststellungen über schlichte Abbildung des Einheitskreises C : I. Auf $|z| = 1$ gibt es eine Punktmenge (a) vom Maß 2π derart, daß für z im Winkel $\rightarrow a$ $f(z)$ gegen einen endlichen Grenzwert $b = b(a)$ strebt, und zwar rascher, als $\sqrt{z - a} \rightarrow 0$; das ist zu deuten: bei der Randabbildung erfolgen „nur selten“ starke Knickungen der Winkel. II. Dann gilt zugleich $f'(z) \sqrt{z - a} \rightarrow 0$. III. Ein Jordانبogen, der den Einheitskreis unter spitzem Winkel in einem a schneidet, wird zu endlicher Länge so abgebildet, daß \widehat{za} in einen Bogen $\widehat{f(z)f(a)}$ übergeht, dessen Länge $o(\sqrt{z - a})$ ist. IV. Die Länge $L(r)$ des Bildes von $|z| = r < 1$ genügt für $r \rightarrow 1$ der Beziehung $L(r) \sqrt{1 - r} \rightarrow 0$, wo r eine Wertmenge der unteren Dichte 1 bei $r = 1$ durchläuft. — Verallgemeinerungen für weitere Annahmen als Schlichtheit (s. nachsteh. Referate).

Ulrich (Gießen).

Denjoy, Arnaud: Sur la représentation conforme. C. R. Acad. Sci., Paris 213, 15—17 (1941).

Vgl. das vorstehende Referat. Einige Erweiterungen der obigen Aussagen für

folgende 4 Typen von Voraussetzungen:

A) $w = f(z)$ meromorph im Ring C' : $\varrho \leq |z| = r < 1$; sphärisch gemessener Inhalt $t(r, f)$ der erzeugten Riemannschen Fläche \mathfrak{B} endlich; Häufungsbereich H von f auf $C' \neq$ Vollebene.

A') $w = f(z)$ regulär und schlicht im Einheitskreis C : $|z| < 1$.

B) B') wie A) A') unter zusätzlicher Forderung der Beschränktheit.

Bei A') gilt z. B. $L(r) (1 - r)^{5/2} \rightarrow 0$. — Verf. bezeichnet als maximale Berührungsordnung von $|z| = 1$ mit einer Kurve $z(t)$, die aus dem Inneren von C in den Punkt $e^{i\alpha}$ mündet, den Wert

$$\overline{\lim} \frac{\log\{1 - |z|\}}{\log|z - e^{i\alpha}|} - 1.$$

V. Dann gilt in einer Menge von Randpunkten (a) des C vom Maß 2π , daß $f(z)$ [schon unter Annahmen A) bzw. B)] nicht bloß im Winkel gegen endliche Randwerte $b = b(a)$ strebt, sondern auch längs aller Kurven, die nach $a = e^{i\alpha}$ mit maximaler Berührungsordnung kleiner als 1 münden. — VI. In Ergänzung zu I) des vorstehenden Referats: Der Wertevorrat von $f(z)$ in (a) hat das Flächenmaß Null. VII. Skizze eines Beispiels, wo der Häufungsbereich H bei Annäherung an ein nicht zu (a) gehöriges $e^{i\beta}$ mit dem Gesamttrand R des w -Bildes von C zusammenfällt und wo R positives Flächenmaß zeigt.

Ulrich (Gießen).

Denjoy, Arnaud: Les continus frontières d'une région et la représentation conforme. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 115—117 (1941).

Verf. bezeichnet als Erreichbarkeitswinkel eines Randpunkts p zum Gebiet G die obere Grenze θ aller Winkel ϑ so, daß ein Kreissektor mit der Spitze p und der Öffnung ϑ in den Nachbarschaften von p vorkommt (ε -Nachbarschaft = gebietsinneres Teilkontinuum der ε -Umgebung eines erreichbaren Randpunkts). Für $\theta = 2\pi$ und $p \in$ Randkontinuum heiße p ein Umkehrpunkt (mit Spitze gegen G). Es werden drei Beispiele konstruiert: VIII. Gebiet G_0 , Rand $R_0 =$ Jordankurve mit abzählbar vielen Umkehrpunkten und sonst nur Randpunkten mit Erreichbarkeitswinkeln $\theta \leq \frac{\pi}{2}$.

IX. G_1 , $R_1 =$ Jordankurve mit abzählbar vielen Umkehrpunkten, doch ohne weitere Randpunkte mit $\theta > 0$. X. G_2 , R_2 vom Typ des Beispiels VII, und wieder mit abzählbar vielen Umkehrpunkten. An diesen Beispielen werden verschiedene Randeigenschaften der Abbildungsfunktionen für $G_\nu \leftrightarrow C$ im Zusammenhang mit den Ergebnissen der vorstehend besprochenen Noten aufgewiesen. Satz I erscheint dann als keineswegs trivial. Insbesondere wird weiter im Anschluß an I und V aufgezeigt, daß bei Abgrenzung von Teilumgebungen zu $a = e^{i\alpha}$ durch Kurven maximaler Berührungsordnung gleich 1 $f(z)$ dort durch $b = b(a)$ i. a. nicht mehr stetig ergänzt wird.

Ulrich (Gießen).

Wolff, Julius: Sur les fonctions holomorphes univalentes. C. R. Acad. Sci., Paris **213**, 158—160 (1941).

Par application du théorème de Koebe sur la déformation dans la représentation conforme et de l'inégalité de Schwarz, l'aut. démontre que, $f(z)$ étant bornée, holomorphe et univalente dans $|z| < 1$, la circonférence $|z| = 1$ contient une épaisseur pleine de points α jouissant de cette propriété: si Γ_α est un arc de courbe simple quelconque, situé dans $|z| < 1$ et dont toutes les cordes font avec le rayon joignant $z = 0$ à $z = \alpha$ un angle de valeur absolue moindre que $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ε donné positif, l'image de Γ_α dans la transformation conforme $w = f(z)$ est une courbe rectifiable. G. Valiron.

Ferrand, Jacqueline: Sur la représentation conforme au voisinage d'un point frontière. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 977—980 (1941).

Verf. ergänzt die Ergebnisse von Ostrowski; vgl., auch für Bezeichnungen, unser Referat in dies. Zbl. **20**, 238. Die rechte z -Halbebene H_z sei durch $\varphi(z) = \zeta$ konform in das ζ -Gebiet Γ abgebildet; $z = \infty$ entspreche einem erreichbaren Randpunkt ζ_∞

über $\zeta = \infty$, der Teil eines Primendes E sei. Verf. gibt zwei Sätze darüber in welchem Teil von $H_z \varphi(z) \rightarrow \infty$ strebt: **I.** in jedem Winkelraum $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, wenn eine Nachbarschaft von ζ_∞ einen Kreissektor enthält. **II.** in einem Gebiet $|x| > C|y|^{-k}$ ($z = x + iy$, die Konstante $k > -1$), wenn Γ ein Teilgebiet Γ^* enthält, das durch Abschneiden derjenigen Ausläufer von Γ entsteht, die das Primende E hervorrufen; Γ^* habe zwar noch ζ_∞ zum erreichbaren Randpunkt, ohne aber ein ζ_∞ umfassendes Primende aufzuweisen; endlich soll Γ^* in H_z abbildbar sein mit positiver Winkelableitung bei ζ_∞ ; die Querschnitte, die die Ausläufer abtrennen, werden quantitativ beschrieben, unter Benutzung von Ostrowskis q_z (vgl. Schluß des erwähnten Referats), wobei k eingeht. Die Ausläufer sind nicht Falten im Sinne Ostrowskis. — **III.** ein Satz zur Existenz der Randableitung, von ähnlicher Struktur wie bei Ostrowski, Hauptsatz über Winkelproportionalität (letzte Formelzeile des Referats); die Kennzeichnung der erforderlichen Dichte der beiden Randpunktfolgen $\zeta^{(i)} \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2$) weicht ab. Ulrich (Gießen).

Ferrand, Jacqueline: Sur l'itération des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 1068—1071 (1941).

Die Ergebnisse der vorstehend besprochenen Note finden Anwendung bei einer von J. Wolff und Denjoy behandelten Iterationsaufgabe [C. R. Acad. Sci., Paris **182**, 42, 255; **183**, 500 (1926); Bull. Soc. Math. France **57**, 195—203 (1929)]. Das von einem Kontinuum berandete ζ -Gebiet Γ sei durch $\psi(\zeta) = z$, $\zeta = \Psi(z)$ in den z -Einheitskreis abgebildet. $\zeta_1 = j(\zeta) = j_1(\zeta)$ sei regulär in Γ mit einem Wertevorrat $\Gamma_1 \subset \Gamma$; es sei $\zeta_n = j(\zeta_{n-1}) = j_n(\zeta)$ und schließlich

$$z_1 = J(z) = \Psi\{j[\psi(z)]\}, \quad z_n = J_n(z) = \Psi\{j[\psi(z_{n-1})]\}$$

eine Iteriertenfolge vom Einheitskreise aus. — Nach Wolff-Denjoy strebt $J_n(z) \rightarrow a$, unabhängig von z , $|a| \leq 1$; dann kann bei $|a| = 1$ $j_n(\zeta)$ gegen einen Punkt α streben bzw. sich häufen gegen einen Teil des Primendes, welches a im Rande von Γ entspricht. Hier kann die Verf. auf Grund ihres obigen Theorems II verschiedene Fälle geometrisch kennzeichnen. — Sie erörtert dann den Einfluß von Annahmen wie Winkelproportionalität und noch schwächeren Forderungen bei der zugrunde liegenden Abbildung auf die Iterationsaufgabe. Ulrich (Gießen).

Kaila, Esko: Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung von mehrfach zusammenhängenden Gebieten. Ann. Acad. Sci. Fennicae A **55**, Nr 9, 1—63 (1940).

Die Hauptpunkte der Theorie der Ränderzuordnung einfach zusammenhängender (ebener) Gebiete werden auf den Fall der linear-polymorphen Abbildung eines mehrfach (auch unendlich vielfach) zusammenhängenden Gebiets \mathfrak{G} in den Einheitskreis übertragen (d. i. eindeutige Abbildung der universellen Überlagerungsfläche). Dabei wird eine von R. Nevanlinna (dies. Zbl. **20**, 29) angegebene Definition für erreichbare Randpunkte zugrunde gelegt, welche weitergehende Unterscheidungen herbeiführt als frühere Definitionen (z. B. von Bieberbach und von Teichmüller, dies. Zbl. **23**, 55) und eine sinngemäße Übertragung der Aussagen über eindeutige Ränderzuordnung auf mehrfachen Zusammenhang ermöglicht: Jedem erreichbaren Randpunkt entspricht eine Klasse von Punkten auf dem Einheitskreis, welche durch die Gruppe der Decktransformationen der Überlagerungsfläche aus einem ihrer Punkte erzeugt wird. — Zwei Wege münden in „denselben“ Randpunkt p , wenn ihre ε -Enden in \mathfrak{G} zu einer geschlossenen Kurve verbunden werden können, die sich stetig in \mathfrak{G} auf p zusammenziehen läßt. — Viele bei einfachem Zusammenhang klassische Ergebnisse werden erweitert und zugleich zeitgemäß neu begründet. Das methodische Hilfsmittel liegt in einer Übertragung des quantitativen Randverzerrungssatzes von Lindelöf, welcher die (Polarkoordinaten-) Dimensionen des Bildes einer ε -Nachbarschaft für jeden Randpunkt zu schätzen erlaubt [Acta Soc. Sci. Fennicae **46**, Nr 4 (1915)]. — Die Arbeit enthält auch ausführliche Beweise einiger Ergebnisse, welche R. Nevanlinna früher kurz angegeben hatte (dies. Zbl. **12**, 78). Ulrich (Gießen).

Colucci, Antonio: Sulla rappresentazione conforme delle superficie a connessione multipla. Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 717—721 (1941).

Skizze einer Erweiterung der Ergebnisse von Caccioppoli über die konforme Abbildung krummer Flächen S , und insbesondere über die Ränderzuordnung, auf einen Sonderfall unendlich hohen Zusammenhangs; Verf. nimmt dabei an, daß die Randkomponenten nur endlich viele Häufungspunkte haben. Im Vordergrund steht die Beachtung der Verhältnisse, welche Unterschiede gegen die konforme Abbildung ebener Gebiete bedingen. Dabei kommen (wie schon Caccioppoli bemerkte und Scorza-Dragoni als unvermeidbar nachwies) die Abweichungen dann zustande, wenn $\lim_{\varrho \rightarrow 0} A(\varrho) : \pi \varrho^2 = \infty$ wird: $A(\varrho)$ ist der Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks um einen festen Punkt C , welches von einer Kugel (C, ϱ) ausgeschnitten wird: solche Punkte sind als Verdichtungspunkte des Flächeninhalts Störungsquellen für die konforme Zuordnung; nach den Voraussetzungen über S kommen sie nur am Rande vor (vgl. dies. Zbl. 15, 42). — Einige Bemerkungen des Verf. lassen vermuten, daß ihm die Dissertation von Grötzsch unbekannt ist [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, math.-phys. Kl. 81, 51—86 (1929)].

Ulrich (Gießen).

Schiffer, Menahem: Sur la variation du diamètre transfini. Bull. Soc. Math. France 68, 158—176 (1940).

Es wird eine neue Lösung der Aufgabe entwickelt, zu n gegebenen Punkten ein Kontinuum zu bestimmen, das sie enthält, beschränkt ist und kleinsten transfiniten Durchmesser zeigt [hierzu Grötzsch, Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 82, 251—263 (1930)]. Verf. benutzt dazu (und zur Lösung zweier verwandter Aufgaben) die von ihm schon mehrmals herangezogene Methode der infinitesimalen Variationen (z. B. dies. Zbl. 19, 222).

Ulrich (Gießen).

Bergman, Stefan: On the surface integrals of functions of two complex variables. Amer. J. Math. 63, 295—318 (1941).

In der Linie seiner früheren Arbeiten [Compositio Math. 6, 305—335 (1939); dies. Zbl. 20, 379; vgl. auch die dort angegebene Literatur] leitet Verf. ein Analogon zur Residuenformel der Theorie einer Veränd. her. Der Rand \mathfrak{R}^3 des Bereiches \mathfrak{B}^4 bestehe aus Stücken von m anal. Hyperflächen H_μ^3 ; die „ausgezeichnete Randfläche“ von \mathfrak{B}^4 (im wes. identisch mit den 2-dim. Kanten von \mathfrak{R}^3) sei \mathfrak{F}^2 . Die Funktionen Q, P_1, P_2 seien in \mathfrak{B}^4 und auf \mathfrak{R}^3 analytisch. Sind ferner $(z_i^{*(\sigma)})$ ($\sigma = 1, \dots, s$) bzw. $(z_i^{**(\varrho)})$ ($\varrho = 1, \dots, r$) die in \mathfrak{B}^4 gelegenen Schnittpunkte der Flächen $P_1 = 0$; $P_2 = 0$ bzw. $P_1 = 0$; $\frac{\partial P_1}{\partial z_2} = 0$, und ist kein $(z_i^{*(\sigma)})$ ein $(z_i^{**(\varrho)})$, so besteht unter geeigneten weiteren Voraussetzungen über \mathfrak{R}^3 und die Flächen $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$ die Beziehung

$$\text{mit} \quad \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{Q}{P_1 \cdot P_2} \cdot \chi \cdot d\omega = 2 \sum_{\sigma=1}^s R_\sigma^* + \sum_{\varrho=1}^r R_\varrho^{**}$$

$$R_\sigma^* = \left[\frac{Q}{D(P_1 P_2)} \right]_{z_i = z_i^{*(\sigma)}}; \quad R_\varrho^{**} = \left[\frac{Q}{P_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1 \partial z_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} \cdot \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2^2}}} \right]_{z_i = z_i^{**(\varrho)}}$$

Hier ist χ eine passende Funktion der in früheren Arbeiten des Verf. eingeführten „erweiterten Klasse“, die im R_4 die Rolle der Potentialfunktionen im R_2 übernimmt. Das wesentliche Hilfsmittel beim Beweise ist eine vorher abgeleitete wichtige Beziehung zwischen gewissen Flächen- und Linienintegralen, erstreckt über den Durchschnitt von \mathfrak{F}^2 und $H_{\mu_0}^3$ bzw. den Durchschnitt von $P_1 = 0$ und $H_{\mu_0}^3$.

Rothstein.

Modulfunktionen:

Wintner, Aurel: On Riemann's fragment concerning elliptic modular functions. Amer. J. Math. 63, 628—634 (1941).

Es wird gezeigt, daß die formalen Ableitungen Riemanns in seinen Fragmenten.

über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen Teil I (Math. Werke, Leipzig 1892, 455—461; s. auch H. J. S. Smith, Collected Papers, 2, 312—320) in einfacher Weise mit Hilfe der Lebesgueschen Integrationstheorie und der Theorie der Fourierreihen begründet werden können. Allgemein wird folgender Satz bewiesen: Sei $a_n = O(n^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$

für ein festes $\varepsilon > 0$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$, $F(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z} dz = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} a_d$ für $|z| < 1$; dann gilt $F(re^{i\theta}) \rightarrow F(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ für $r \rightarrow 1$. Maab.

Potter, H. S. A.: The mean values of certain Dirichlet series. 1. Proc. London Math. Soc., II. s. 46, 467—478 (1940).

Genügt die Dirichletreihe $f(s) = \sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}$ gewissen einfachen Forderungen an die Lage ihrer Singularitäten, und ist $\sum |a_n|^2 = O(x^{\alpha+\varepsilon})$ für $l_n \leq x$ und $\log(l_n/l_{n-1}) > l_n^{-(1+\varepsilon)}$ für $n \leq n_0$, $l \geq 0$, so läßt sich eine Grenze angeben, so daß $\int_{-T}^T |f(\sigma + it)|^2 dt \sim 2T \sum_1^{\infty} |a_n|^2 l_n^{-2\sigma}$ für $\sigma > q$. Diesen Satz wendet Verf. insbesondere auf Heckes Dirichletreihen mit Funktionalgleichung und Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ an (dies. Zbl. 14, 16; 15, 402; 16, 355) und zeigt z. B., daß $q = \frac{1}{2}k$ ist, wenn $\sum_{n \leq x} |a_n|^2 = O(x^{k+\varepsilon})$ oder wenn $0 < \lambda < 2$ und $f(s)$ bei $s = k$ regulär ist oder wenn $\sum a_n e^{2\pi i n \tau}$ eine Spitzenform ist. Lochs (Kennelbach).

Potter, H. S. A.: The mean values of certain Dirichlet series. 2. Proc. London Math. Soc., II. s. 47, 1—19 (1940).

Siehe vorstehendes Referat. Nach einer Methode von Titchmarsh zeigt Verf.: Hat $f(s)$ die Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ und ist $\sum_{n < x} |a_n|^2 \sim x^k L(x)$, wo $L(x)$ eine langsam wachsende Funktion ist, und gilt $L_1(x) = \int_1^x L(t) dt/t \rightarrow \infty$, wenn $x \rightarrow \infty$, so ist $\int_0^T f(\frac{1}{2}k + it)^2 dt \sim 2k T L_1(T)$. Es gibt noch eine Verallgemeinerung, in der zwei Dirichletreihen auftreten, die durch eine der Heckeschen ähnliche Funktionalgleichung verbunden sind. Der Beweis ist sehr lang. Einige weitere Sätze werden daraus abgeleitet und Anwendungen folgen: Ist $0 < \lambda < 2$ und $f(s)$ regulär bei $s = k$, so ist obiges Integral $= O(T \log T)$. Das gleiche gilt, wenn $f(s)$ zu einer Spitzenform gehört. Für die L -Funktionen zu Nicht-Hauptcharakteren mod $q > 2$ ist das Integral $\sim \varphi(q) T \log T/q$, worin φ die Anzahl der teilerfremden Restklassen bedeutet. Lochs.

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Lehme, H.: Über die Gleichung der Gaskugeln und andere Differentialgleichungen von ähnlicher Form. J. reine angew. Math. 183, 197—231 (1941).

Verf. untersucht die Emdensche Differentialgleichung der Gaskugeln

$$Y \frac{dY}{dX} + \frac{5-\nu}{\nu-1} Y + \frac{2(3-\nu)}{(\nu-1)^2} X + X^\nu = 0,$$

die durch die Transformation $Y = a\eta$, $X = b\xi$ die einfachere Gestalt

$$(1) \quad \eta \frac{d\eta}{d\xi} = \eta + \kappa(\xi - \xi^\nu)$$

annimmt, wobei $\kappa = \frac{2(\nu-3)}{(\nu-5)^2}$, $b^{\nu-1} = \frac{2(\nu-3)}{(\nu-1)^2}$, $a = \frac{5-\nu}{\nu-1} b$ ist. Verf. beschränkt sich bei seinen Untersuchungen auf den Fall, daß ν eine positive ganze Zahl größer als Eins ist. Dann ist die obige Gleichung (1) ein spezieller Fall der Gleichung

$$(2) \quad \eta \frac{d\eta}{d\xi} = \eta + F(\xi),$$

wobei $F(\xi) = c(\xi - \alpha_1)(\xi - \alpha_2) \dots (\xi - \alpha_r)$ eine ganze rationale Funktion vom

Grade ν ist, deren Linearfaktoren voneinander verschieden sind. — Die Integrale der Gleichung (2) haben keine beweglichen Pole, dagegen verschiebbare algebraische Verzweigungspunkte. Außer den kritischen Punkten, die mit den α_m übereinstimmen, und den algebraischen Verzweigungspunkten haben die Integrale der Differentialgleichung (2) keine weiteren Singularitäten. Die oben genannten Differentialgleichungen

1. Ord. (1) und (2) werden durch die Substitution $\eta = t \frac{d\xi}{dt}$ in die beiden Differentialgleichungen 2. Ord. $t^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = \kappa(\xi - \xi^\nu)$ und

$$(3) \quad t^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = F(\xi)$$

übergeführt. Verf. bestimmt dann diejenigen Lösungen der Gleichung (3), oder was das gleiche bedeutet, des Systems $t \frac{d\xi}{dt} = \eta$, $t \frac{d\eta}{dt} = \eta + F(\xi)$, die für $t=0$ die Werte $\xi = \alpha_k$, $\eta = 0$ annehmen, d. h. also die Lösungen in der Umgebung der kritischen Punkte. Für $\xi - \alpha_k$ und η existieren nun konvergente Reihen, welche nach Potenzen der beiden Variablen $\omega_1 = \gamma_1 t^{\beta_1}$, $\omega_2 = \gamma_2 t^{\beta_2}$ fortschreiten. Dabei sind β_1 und β_2 positive Größen. Sie genügen einer quadratischen Gleichung, γ_1 und γ_2 sind willkürliche Konstanten. Für den Fall, daß $F(\xi) = \kappa(\xi - \xi^\nu)$ ist, werden dann im folgenden Teil der Arbeit die Koeffizienten der Reihenentwicklungen berechnet. *Wegner.*

Miller, J. C. P.: On a criterion for oscillatory solutions of a linear differential equation of the second order. Proc. Cambridge Philos. Soc. **36**, 283—287 (1940).

In der Differentialgleichung (1) $y'' + f(x)y = 0$ sei f für $x \geq x_0$ stetig. Es wird ein Oszillationskriterium hergeleitet im Falle, daß $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ ist. Ist $\log^p x = \log(\log^{p-1} x)$ und

$$4F_n(x, k) = x^{-2} + (x \log x)^{-2} + \dots + \left(\prod_{p=0}^{n-1} \log^p x \right)^{-2} + k \left(\prod_{p=0}^n \log^p x \right)^{-2},$$

so hat jede eigentliche Lösung von (1) für $x \geq x_0$ endlich viele oder unendlich viele Nullstellen, je nachdem für ein n $f(x) \leq F_n(x, k)$ mit einem $k \leq 1$ oder $f(x) \geq F_n(x, k)$ mit einem $k > 1$ ist. Der Beweis wird mittels des Sturmischen Vergleichssatzes und

des Schlusses von n auf $n+1$ erbracht; dabei wird die Transformation $y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \eta(\xi)$, $\xi = e^x$ verwendet, durch welche die Gleichung (1) mit $F_n(x, k)$ statt $f(x)$ in (1) mit $F_{n+1}(\xi, k)$ und η statt y übergeht. *Kamke* (Tübingen).

Makai, E.: Asymptotische Abschätzung der Eigenwerte gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **10**, 123—126 (1941).

Das Randwertproblem $y'' + \lambda \varrho(x)y = 0$ mit I) $y(a) = y(b) = 0$ oder II) $y'(a) = y'(b) = 0$ wird unter der Annahme behandelt, daß in $[a, b]$ ϱ positiv und zweimal ableitbar sei. Die „Phase“

$$\varphi(x) = \arccotg \frac{y'}{\sqrt{-yy''}}$$

wird gleich einem geraden oder ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, je nachdem y oder y' verschwindet, und besitzt die Eigentümlichkeit, daß, falls $\varphi(a) = m \frac{\pi}{2}$, $\varphi(b) = n \frac{\pi}{2}$ ist, die Kongruenz $\varphi(x) \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ im Innern von (a, b) genau $n - m - 1$ Lösungen besitzt. Daraus ergibt sich in Verbindung mit der Differentialgleichung für $\varphi(x)$ eine asymptotische Abschätzung des n -ten Eigenwertes:

$$\sqrt{\lambda_n} - \left[n\pi / \int_a^b \sqrt{\varrho(x)} dx \right] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Analog findet sich für die Differentialgleichung $y'' + [p(x) + \lambda]y = 0$ unter den Randbedingungen (I) oder (II):

$$\int_a^b \sqrt{\lambda_n + p(x)} dx - n\pi = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

— In Formel (10) fehlt rechts der Faktor $\frac{1}{2}$.

Harald Geppert (Berlin).

Ritt, J. F.: On a type of algebraic differential manifold. Trans. Amer. Math. Soc. 48, 542—552 (1940).

Eine Differentialmannigfaltigkeit ist die Gesamtheit aller in einem gewissen Bereich meromorphen Lösungen eines Formensystems Σ in y und den Ableitungen y_1, y_2, \dots von y . Durch die Substitution $z = y^{-1}$ geht die Mannigfaltigkeit in eine andere über. Σ' sei die Gesamtheit der Formen in z , die diese transformierte Mannigfaltigkeit enthalten. Wenn Σ' nicht die Lösung $z = 0$ hat, so heißt das ursprüngliche System Σ beschränkt. Dafür ist, wenn Σ abgeschlossen ist und Lösungen besitzt, notwendig und hinreichend, daß Σ eine Form A enthält, die als Polynom in y, y_1, \dots einen Term in y allein besitzt, dessen Grad größer ist als der aller anderen Terme. Sind Σ_1 und Σ_2 Systeme mit Lösungen y' und y'' , so ist die Gesamtheit aller Formen, die Null werden für alle Summen $y' + y''$ bzw. Produkte $y' y''$ ein neues System, welches die Summe bzw. das Produkt von Σ_1 und Σ_2 heißt. Mit Hilfe der klassischen Ergebnisse von Painlevé über den algebraischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung wird bewiesen, daß die Summe und das Produkt von beschränkten Formensystemen erster Ordnung wieder beschränkt sind. Für Systeme höherer Ordnung gilt das nicht mehr; das liegt daran, daß das Produkt die Lösung Null haben kann, ohne daß ein Faktor die Lösung Null hat. — Die Gesamtheit aller Formen in y , die Null werden, wenn y die Ableitung einer Lösung von Σ ist, heißt die Ableitung von Σ . Es wird gezeigt, daß die Ableitung eines beschränkten Formensystems wieder beschränkt ist.

van der Waerden (Leipzig).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Pfeiffer, G.: Sur les équations, les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues, qui possèdent une intégrale de S. Lie généralisée. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 31, 195—197 (1941).

Es handelt sich um Äquivalenzbetrachtungen von Teilsystemen Jacobischer (linearer) partieller Differentialsysteme für mehrere unbekannte Funktionen, denen ein (verallgemeinertes) Liesches Integral zukommt, mit Einzelgleichungen, die linear homogen sind und nur eine unbekannte Funktion enthalten. — Die Ergebnisse werden erst für Liesche Integrale vom Rang ϱ und der Klasse $(n - 1)$ formuliert und dann auf die Klasse $g < (n - 1)$ verallgemeinert.

M. Pinl (Augsburg).

Siegel, Carl Ludwig: On the integrals of canonical systems. Ann. of Math., II. s. 42, 806—822 (1941).

$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; i = 1, \dots, n; n > 1$ sei ein kanonisches Differentialsystem mit der Lösung $x_i = y_i = 0$ (Gleichgewichtslage). $H = H(x, y)$ sei bei $x = y = 0$ analytisch. Die charakteristischen Exponenten $\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ der Lösung $x = y = 0$ seien rein imaginär (formale Stabilität der Lösung). Ferner seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ linear unabhängige Zahlen. Man hat seit langem die Vermutung, daß „im allgemeinen“ die einzigen bei $x = y = 0$ analytischen Integrale des Differentialsystems die Form $f(H)$ besitzen, wo f an der Stelle $H = H(0, 0)$ analytisch ist. Diese Vermutung ist bis heute noch nicht präzisiert und bewiesen worden. Verf. gelingt es indessen, folgenden Satz zu beweisen: Man denke sich die von der dritten Ordnung ab variabel gedachten Koeffizienten der Reihe für $H(x, y)$ nach Potenzen von x_i, y_i in eine einfache Folge gebracht, c_1, c_2, \dots ; es werden natürlich nur solche Folgen betrachtet, die zu konvergenten Potenzreihen gehören. Zu beliebigem c_1, c_2, \dots und zu einer beliebigen Folge positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ gibt es dann eine Folge c'_1, c'_2, \dots derart, daß $|c'_i - c_i| < \varepsilon_i$ ist, und daß $f(H)$, wo f bei $H = H(0, 0)$ analytisch ist, die einzigen bei $x = y = 0$ analytischen Integrale des Systems (mit dem Koeffizienten c'_i) darstellen. Es folgt leicht, daß für ein solches System die bekannte formale Darstellung der Lösungen durch trigonometrische Reihen divergent ist.

E. Hopf (Leipzig).

Fantappiè, L.: Il punto di vista reale e quello analitico nella teoria delle equazioni a derivate parziali. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 188—195 (1941).

Verf. gibt einen expliziten Ausdruck für die harmonische Funktion $u(x, y)$, die auf einem analytischen Bogen C samt ihrer Normalableitung vorgegebene analytische Werte annimmt (Cauchysches Problem); $u(x, y)$ ist in einer Umgebung von C definiert. Ist C der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes D , so besitzt $u(x, y)$ i. a. Singularitäten innerhalb des Gebietes, und man kann entweder bei vorgegebenen Randwerten von u (Dirichletsches Problem) die Randwerte der Normalableitung oder umgekehrt bei vorgegebenen Randwerten von du/dn (Neumannsches Problem) die Randwerte von u derart bestimmen, daß $u(x, y)$ keine Singularität mehr in D aufweist. Nach einem Hinweis auf die Anwendung der vom Verf. entwickelten Theorie der linearen analytischen Funktionale in dieser Richtung wird als Beispiel die Lösung des Dirichletschen Problems für den Kreis auf diese Weise hergeleitet. *G. Cimmino.*

Brelot: Sur la théorie autonome des fonctions sous-harmoniques. Bull. Sci. math., II. s. 65, 72—98 (1941).

Eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 23, 233), in welcher er das Dirichletsche Problem für eine offene beschränkte Menge ausschließlich mittels der Theorie der subharmonischen Funktionen zu behandeln beabsichtigte, wird hier durch die Einführung des Begriffs von Polarmengen ergänzt, d. h. solchen Mengen E , für welche eine im ganzen Raume subharmonische Funktion existiert, die stets gleich $-\infty$ auf E ist. Dadurch wird es möglich, zwei in der genannten Arbeit benutzte Evanssche Sätze entbehrlich zu machen, die sich dem subharmonischen Rahmen entzogen. Nach einigen Kennzeichnungen der Polarmengen, für die auf die Originalarbeit verwiesen werden muß, beweist Verf., daß einer jeden Polarmenge E eine in CE harmonische Funktion entspricht, die stets gleich $-\infty$ auf E ist. Es folgt eine Untersuchung der Verhältnisse zwischen den Begriffen Polarmenge, Menge von harmonischem Nullmaß, Menge von Nullkapazität. Ist insbesondere E geschlossen oder Vereinigungsmenge geschlossener Mengen, so ist E dann und nur dann eine Polarmenge, wenn sie von Nullkapazität ist.

G. Cimmino (Bologna).

Beckenbach, E. F.: Functions having subharmonie logarithms. Duke math. J. 8, 393—400 (1941).

Zwei neue Kennzeichnungen der PL -Funktionen, nämlich solcher Funktionen, die mittels einer subharmonischen Funktion $u(x, y)$ durch $\exp u(x, y)$ darstellbar sind: $p(x, y)$ ist dann und nur dann eine PL -Funktion, wenn 1. für eine feste, nicht konstante, analytische Funktion $f(z)$ und für jede komplexe Konstante γ das Produkt $|f - \gamma|^2 \cdot u$ subharmonisch ist; 2. für jede stetige PL -Funktion $q(x, y)$ und für jede Kreisscheibe C der arithmetische Mittelwert des Produktes pq in C das Produkt der arithmetischen Mittelwerte von p und q auf dem Rand von C nicht übersteigt.

G. Cimmino (Bologna).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Dressel, F. G.: A Stieltjes integral equation. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 79—83 (1941).

Verf. gibt Bedingungen an, unter denen die Integralgleichungen

$$F(x) = M(x) + \lambda \int_0^1 H(x, y) dF(y), \quad f(x) = m(x) + \int_0^1 f(y) dK(x, y)$$

auf Gleichungen vom Fredholmschen Typus zurückgeführt werden können. In diesen sind die Integrale im Sinne von Young-Stieltjes zu verstehen. Vgl. zu demselben Gegenstand auch die Arbeit des Verf. in Bull. Amer. Math. Soc. 44, 434—437 (1938) (dies. Zbl. 23, 128).

C. Miranda (Torino).

Giraud, Georges: Équations de Fredholm dont le noyau est fonction holomorphe d'un paramètre. Bull. Sci. math., II. s. 65, 103—112 (1941).

Die Arbeit enthält einige Zusätze zu einer in dies. Zbl. 24, 410 besprochenen Arbeit des Verf. zu demselben Gegenstand.

C. Miranda (Torino).

Giraud, Georges: Opérations linéaires où figurent des intégrales principales simples et dont les données sont holomorphes par rapport à un paramètre. Bull. Sci. math., II. s. **65**, 144—155 (1941).

Estensione al caso delle equazioni a integrali principali semplici di taluni risultati dello stesso A. relativi alle equazioni integrali fredholmiane il cui nucleo é funzione olomorfa di un parametro (questo Zbl. **24**, 410). *C. Miranda* (Torino).

Obreschkoff, Nikola: Sopra gli sviluppi asintotici e la trasformazione di Laplace. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **20**, 137—140 (1941).

$F(x)$ sei eine für $x > 0$ erklärte Funktion, $f(s)$ ($s = \sigma + it$) ihr für $\sigma > 0$ konvergentes Laplacesches Integral. Aus der asymptotischen Entwicklung von $F(x)$ für $x \rightarrow \infty$ folgert man leicht eine solche von $f(s)$ für $|s| \rightarrow 0$, $\Re s > 0$. Schwerer ist die umgekehrte Aufgabe, der sich Verf. hier unterzieht. G bedeute die rechts der Geraden $\sigma = -\alpha$ ($\alpha > 0$) gelegene Halbebene nach Ausschluß eines zur σ -Achse spiegelbildlichen, in das Gebiet $\sigma < 0$ einspringenden Winkelkeils mit dem Scheitel $\sigma = t = 0$; der das Gebiet G abgrenzende Linienzug heiße C . $f(s)$ sei in G regulär und habe auf C keine andre singuläre Stelle als $s = 0$; $f(s)$ strebe gleichmäßig gegen 0, wenn $|s| \rightarrow 0$ in G ; es gelte die komplexe Umkehrformel. Verf. beweist dann: Läßt $f(s)$, wenn $|s| \rightarrow 0$ in G , die asymptotische Entwicklung zu

$$f(s) = \frac{a_0}{s^{\lambda_0}} + \frac{a_1}{s^{\lambda_1}} + \frac{a_2}{s^{\lambda_2}} + \dots, \quad 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

dann besitzt $F(x)$ für $x \rightarrow \infty$ die asymptotische Entwicklung

$$F(x) = \frac{a_0}{\Gamma(\lambda_0)} x^{\lambda_0-1} + \frac{a_1}{\Gamma(\lambda_1)} x^{\lambda_1-1} + \frac{a_2}{\Gamma(\lambda_2)} x^{\lambda_2-1} + \dots$$

Dasselbe gilt bei gewisser andrer Gebietsform.

Koschmieder (Graz).

Gross, B.: Über eine neue Integraltransformation. Ann. Acad. Brasil. Sci. **12**, 317—318 (1941) [Portugiesisch].

$F(\beta)$ sei etwa eine periodische Funktion mit der Periode $2l$, in $-\infty < \beta < \infty$ stetig und dort mit einer bis auf einzelne Punkte stetigen Ableitung versehen; der Mittelwert von $F(\beta)$ in $(-l, +l)$ verschwinde. Verf. behauptet, daß eine stetige Lösung der Integralgleichung erster Art

$$(1) \quad F(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(\alpha) \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} d\alpha \quad \text{durch} \quad (2) \quad A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(\beta) \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} d\beta$$

gegeben sei. Die gegenseitigen Abbildungen (1), (2) sind die in der Überschrift gemeinten Integralumwandlungen; Verf. erörtert ihre nahe Beziehung zur Fourierschen Abbildung.

Koschmieder (Graz).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Catunda, Omar: Sui sistemi di equazioni alle variazioni totali in più funzionali incogniti. Atti Accad. Italia, Mem. **11**, 751—765 (1940).

Für die analytischen Funktionale wird unter geeigneten Voraussetzungen ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz über die Lösungen von Systemen totaler Variationsgleichungen, die analog den vollständigen Differentialsystemen bei Funktionen von mehreren Veränderlichen sind, bewiesen.

Autoreferat.

Lorch, Edgar R.: The integral representation of weakly almost-periodic transformations in reflexive vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 18—40 (1941).

\mathfrak{B} sei ein reflexiver Banachraum, d. h. $((\mathfrak{B})) = \mathfrak{B}$, wenn (\mathfrak{B}) den konjugierten Raum bedeutet. Eine lineare Transformation T von \mathfrak{B} in sich heißt schwach fast-periodisch, wenn erstens T^{-1} existiert und beschränkt ist und wenn zweitens für jedes feste $f \in \mathfrak{B}$ die Menge aller $T^n f$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, schwach bedingt kompakt ist, d. h. daß sich aus jeder Folge $T^{n_i} f$ eine schwach konvergente Teilfolge auswählen läßt. T ist dann und nur dann schwach fastperiodisch, wenn T gleichmäßig beschränkt

ist, wenn also $|T^n| \leq K$ für alle n gilt. Alle isometrischen T sind schwach fastperiodisch. Ist T periodisch, $T^n = I$, so existieren Projektionen P_r mit $P_r P_s = 0$, $P_1 + \dots + P_n = I$,

$TP_r f = e^{\frac{2\pi i r}{n}} P_r f$. Für eine beliebige schwach fastperiodische Transformation V wird nun in folgender Weise eine Art Spektralzerlegung erreicht. Mit Hilfe der Ergodensätze beweist man die Existenz dreier linearer abgeschlossener Teilräume \mathfrak{M}' , \mathfrak{M}'' , \mathfrak{N} mit $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{M}'' \oplus \mathfrak{N}$, auf denen $Vf = f$ gilt bzw. $Vf = -f$ bzw. $(V^2 - I)f \neq 0$ für $f \neq 0$. Auf \mathfrak{N} läßt sich V so weiter zerlegen: $f(x)$ sei die periodische Funktion der Periode 2π , für die $f(x) = 0$ für $-\pi \leq x \leq 0$ und $f(x) = \sin x$ für $0 < x < \pi$ ist. Ihre Fourierentwicklung ist absolut konvergent. Setzt man in ihr V statt e^{ix} ein, so

erhält man eine wegen $|V^n| \leq K$ absolut konvergente Reihe $A = \frac{1}{4i}(V - V^{-1}) + \frac{1}{\pi} \left(I - \frac{1}{1 \cdot 3}(V^2 + V^{-2}) - \frac{1}{3 \cdot 5}(V^4 + V^{-4}) - \dots \right)$. Der Funktion $\sin x - f(x)$

entspricht eine zweite solche Reihe B , und es gilt $AB = BA = 0$. Sei \mathfrak{Q} der lineare abgeschlossene Teilraum aller f aus \mathfrak{N} mit $Af = 0$, \mathfrak{R} entsprechend der der f mit $Bf = 0$. Dann haben \mathfrak{Q} und \mathfrak{R} nur 0 gemeinsam und spannen zusammen \mathfrak{N} auf, d. h. die Summen $f_1 + f_2$, $f_1 \in \mathfrak{Q}$, $f_2 \in \mathfrak{R}$, sind in \mathfrak{N} dicht. Das Paar $\{\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}\}$ reduziert \mathfrak{N} in dem Sinn, daß Vf in \mathfrak{Q} bzw. \mathfrak{R} liegt, wenn f in \mathfrak{Q} bzw. \mathfrak{R} liegt. Es ist aber noch unbekannt, ob $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q} \oplus \mathfrak{R}$ ist. Es werde $V_\lambda = e^{-i\lambda} V$ gesetzt, A_λ und B_λ seien die zugehörigen Transformationen. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschiedene Zahlen mit $-\pi < \lambda_j < 0$, so gibt

es zu jedem f eine eindeutig bestimmte Zerlegung $f = \sum_{j=1}^n (g_{\lambda_j} + g'_{\lambda_j}) + h$ mit

$Vg_{\lambda_j} = e^{i\lambda_j} g_{\lambda_j}$, $Vg'_{\lambda_j} = -e^{i\lambda_j} g'_{\lambda_j}$, und h in der linearen abgeschlossenen Mannigfaltigkeit, die durch alle $(A_{\lambda_1} + B_{\lambda_1})(A_{\lambda_2} + B_{\lambda_2}) \dots (A_{\lambda_n} + B_{\lambda_n})f$ erzeugt wird. Sei nun λ fest, $-\pi < \lambda < 0$. Mit \mathfrak{E}_λ werde die Gesamtheit aller f mit $Af = A_\lambda f = 0$ und $g_0 = g'_0 = g'_\lambda = 0$ bezeichnet, mit \mathfrak{F}_λ die aller f mit $BB_\lambda f = 0$ und $g_\lambda = 0$. Ist $0 < \lambda < \pi$, so bestehe \mathfrak{E}_λ aus allen f mit $AA_\lambda f = 0$ und $g'_0 = 0$, \mathfrak{F}_λ aus allen f mit $Bf = 0$, $B_\lambda f = 0$ und $g_0 = g_\mu = g'_\mu = 0$ ($\mu = \lambda - \pi$). \mathfrak{E}_0 bestehe aus allen f mit $Af = 0$ und $g'_0 = 0$, \mathfrak{F}_0 aus allen f mit $Bf = 0$ und $g_0 = 0$. Ferner sei $\mathfrak{E}_{-\pi} = 0$, $\mathfrak{F}_{-\pi} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}_\pi = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}_\pi = 0$. Dann gilt: Zu jedem λ , $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, gehört ein Paar $\{\mathfrak{E}_\lambda, \mathfrak{F}_\lambda\}$, das V im obigen Sinn reduziert; \mathfrak{E}_λ und \mathfrak{F}_λ haben nur die 0 gemeinsam und spannen \mathfrak{B} auf; $\mathfrak{E}_\lambda \supset \mathfrak{E}_\mu$ für $\lambda > \mu$; $\mathfrak{F}_\lambda \subset \mathfrak{F}_\mu$ für $\lambda < \mu$. Dieses Paar $\{\mathfrak{E}_\lambda, \mathfrak{F}_\lambda\}$ ist in folgendem Sinn ein Analogon zur Spektralschar eines unitären Operators im Hilbertschen Raum: Ist λ ($-\pi \leq \lambda \leq \pi$) gegeben und $\varepsilon > 0$, so gibt es einen linearen abgeschlossenen Teilraum \mathfrak{A}_λ , so daß \mathfrak{A}_λ in $\mathfrak{E}_{\lambda+\varepsilon}$ und $\mathfrak{F}_{\lambda-\varepsilon}$ liegt und für jedes f in \mathfrak{A}_λ die Ungleichung $\|(V - e^{i\lambda} I)f\| \leq \varepsilon \|f\|$ gilt. Ferner gibt es endlich viele $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so daß \mathfrak{B} durch die zugehörigen \mathfrak{A}_{λ_i} aufgespannt wird. Die \mathfrak{A}_{λ_i} ergeben sich als Durchschnitt von \mathfrak{E}_0 bzw. \mathfrak{F}_0 mit den durch die Elemente $A_{\lambda_i-\delta} \cdot B_{\lambda_i+\delta} f$ erzeugten Teilräumen für geeignetes δ . Rechnet man in üblicher Weise λ zum Punktspektrum, kontinuierlichen Spektrum bzw. zur Resolventenmenge, je nachdem $(V - \lambda I)f = 0$ lösbar ist bzw. $V - \lambda I$ eine nichtbeschränkte Inverse hat bzw. $V - \lambda I$ eine beschränkte Inverse hat, so gilt: Ist V schwach fastperiodisch, so ist λ für $|\lambda| \neq 1$ in der Resolventenmenge; für $-\pi < \lambda < \pi$ ist λ im Punktspektrum, wenn $\mathfrak{F}_{\lambda-0} \neq \mathfrak{F}_\lambda$ ist, λ ist im kontinuierlichen Spektrum, wenn $\mathfrak{F}_{\lambda-0} = \mathfrak{F}_\lambda$, aber nicht $\mathfrak{F}_{\lambda-\delta} = \mathfrak{F}_{\lambda+\delta}$ für ein $\delta > 0$; im letzten Fall gehört λ zur Resolventenmenge. — Schließlich wird zu einem schwach fastperiodischen V , für das $(V + I)^{-1}$ existiert, die Transformation $H = -i(V - I)(V + I)^{-1}$ gebildet. Für diese (nicht notwendig beschränkten) H läßt sich eine Spektraldarstellung analog der für selbstadjungierte Operatoren geben: Es gibt eine Spektralschar $\{\mathfrak{E}_\lambda, \mathfrak{F}_\lambda\}$, $-\infty < \lambda < +\infty$, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem λ eine abgeschlossene lineare Teilmannigfaltigkeit \mathfrak{D}_λ in $\mathfrak{E}_{\lambda+\varepsilon}$ und $\mathfrak{F}'_{\lambda-\varepsilon}$ existiert, so daß für $f \in \mathfrak{D}_\lambda$ Hf existiert und $\|(H - \lambda I)f\| \leq \varepsilon \|f\|$ ist. Abzählbar viele geeignete \mathfrak{D}_λ spannen \mathfrak{B} auf.

G. Köthe (Gießen).

Ambrose, Warren: Representation of ergodic flows. *Ann. of Math.*, II. s. 42, 723—739 (1941).

Ω^* sei ein Raum mit den Punkten P^* ; m^* ein absolut additives Maß in ihm, $0 < m^*(\Omega^*) < \infty$. $S_t P^*$ sei eine beliebige m^* -treue und (P^*, t) -meßbare Strömung in Ω^* . Verf. beweist unter der (unwesentlichen) Voraussetzung, daß die Strömung ergodisch ist, daß die Strömung im maßtheoretischen Sinne einer Strömung von folgendem Typus isomorph ist. Man geht, um eine Strömung von diesem Typus zu erklären, von einem Raum Ω mit den Punkten P und mit einem absolut additiven Maß m , ferner einer m -treuen Abbildung T von Ω auf sich, und schließlich einer m -summierbaren Funktion $f(P) > 0$ aus. Ω^* sei der Raum der Punkte $P^* = (P, x)$ mit $0 \leq x \leq f(P)$. Man definiert $S_t P^* = (P, x + t)$, bis $x + t = f(P)$ wird; dann wird der Punkt $(P, f(P))$ durch den Punkt $(TP, 0)$ ersetzt. $dm^* = dm dx$ ist S_t -invariant. — Um die ursprüngliche Strömung $S_t P^*$ im gegebenen Raume Ω^* als Strömung der betrachteten speziellen Art darzustellen, geht man von folgendem, sehr einfachen Gedanken aus. Man identifiziert Ω mit einer „Schnittfläche“ in Ω^* , d. h. einer Menge, die von jeder Bahnkurve in Vergangenheit und Zukunft unendlich oft geschnitten wird; die entsprechenden t -Werte sollen auf der t -Achse stets eine divergente Folge bilden. Eine solche Menge Ω , die natürlich noch Meßbarkeitsforderungen erfüllen muß, kann man auf unendlich viele Arten gewinnen. Ist nun P ein Punkt von Ω und $\bar{t} = \bar{t}(P)$ der kleinste positive t -Wert, so daß $S_{\bar{t}}(P) \subset \Omega$ liegt, so setze man $T(P) = S_{\bar{t}}(P)$ und $f(P) = \bar{t}(P)$. Das m -Maß auf Ω wird leicht aus m^* gewonnen.

E. Hopf (Leipzig).

Praktische Analysis:

● **Hayashi, Keiichi:** Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1941. 182 S. RM. 9.—.

Ein Neudruck (ebenso wie der Neudruck von 1931) des vielbenutzten, im Jahr 1920 erschienenen Tafelwerkes.

Collatz (Karlsruhe).

San Juan, R.: Beiträge zur Graeffeschen Methode zur Lösung algebraischer Gleichungen. *Rev. mat. hisp.-amer.*, III. s. 1, 1—14 (1939) [Spanisch].

Für die Wurzeln x_k eines Polynoms n -ten Grades möge gelten:

$$|x_i| > |x_j| \quad \text{bei} \quad 1 \leq i \leq m, \quad m+1 \leq j \leq n.$$

Genügend häufige Graeffe-Transformation erlaubt dann, die x_i aus den Wurzeln des

Transformiertenabschnitts $\sum_0^m A_\nu x^{n-\nu}$ („bis A_m “) und die x_j aus denen des Abschnittes $\sum_m^n A_\nu x^{n-\nu}$ („ab A_m “) beliebig genau zu berechnen. Bei Fortsetzung der Graeffe-

Transformation transformieren sich die Abschnitte getrennt. — Verf. fragt, wie man aus den Koeffizienten erkennen kann, ob m Wurzeln größeren Betrag haben als die übrigen $n - m$. Ein Beispiel zeigt, daß man zur Beantwortung nicht einfach den angeführten Satz umkehren kann; bei Zerfall des Polynoms in 2 Abschnitte, die sich getrennt transformieren, kann der erste Wurzeln gleichen Betrages wie der zweite enthalten. Der gewünschte Sachverhalt liegt jedoch vor, wenn die Koeffizienten eine gewisse, hinreichende Bedingung erfüllen. Haben m Wurzeln größeren Betrag als die übrigen, so ist umgekehrt diese Bedingung wenigstens für alle genügend hohen Graeffe-Transformierten erfüllt. Zum Schluß werden Polynome mit Wurzeln gleichen oder beinahe gleichen Betrages betrachtet.

Theodor Zeck (Prag).

Busche, Erich: Zur Integration der ballistischen Hauptgleichung. *Deutsche Math.* 6, 97—99 (1941).

Ein von A. Klose [*Deutsche Math.* 2, 473—479 (1937); dies. Zbl. 17, 117] angegebenes zeichnerisches Iterationsverfahren zur Integration der ballistischen Hauptgleichung wird ins Rechnerische übertragen und zugleich so umgeformt, daß man bei

Einführung zweier neuer Funktionen A und B ohne Iterationen auskommt. Dabei hängen A und B mit der Geschwindigkeit v und dem Luftwiderstand $m \cdot v$ zusammen: $A = v + \frac{1}{2}w$, $B = v - \frac{1}{2}w$. Für A und B wird im Auszug eine Tabelle bei Zugrundelegung des Majewskischen Zonenpotenzgesetzes gegeben. Collatz (Karlsruhe).

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Četaev, N. G.: Eine Modifizierung des Gaußschen Prinzips. J. appl. Math. a. Mech. 5, Nr 1, 11—12 u. dtsh. Zusammenfassung 12 (1941) [Russisch].

Bezeichnet \bar{r}_i ($i = 1, \dots, n$) den Ortsvektor des Massenpunktes m_i eines dynamischen Systems, \bar{K}_i die Resultierende der auf m_i wirkenden äußeren Kräfte, so folgt, wie der Verf. zeigt, aus dem Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges, daß der Ausdruck $T = \sum_1^n \dot{\bar{r}}_i \cdot (\bar{K}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \cdot (\bar{r}_i dt + \frac{1}{2} \cdot \ddot{\bar{r}}_i dt^2)$ in einem beliebigen Zeitpunkt t für die

wirkliche Systembahn unter allen kinematisch möglichen Bahnen, deren Orts- und Geschwindigkeitsvektoren mit denen der Systembahn übereinstimmen, ein relatives Maximum besitzt. Rossbach (Karlsruhe).

Sonnino, Sergio: Sulla integrazione di una equazione di Levi-Civita che interessa il problema della separazione di variabili dell'equazioni di Hamilton-Jacobi. Ann. Acad. Brasil. Sci. 12, 269—275 (1940).

Die vorliegende, an Druckfehlern überreiche Arbeit ist falsch. Wohl trifft es zu, daß jede Funktion der Gestalt $\varphi(c_1 p_1 + q_1, c_2 p_2 + q_2, \dots, c_n p_n + q_n)$ mit willkürlichen Konstanten c_1, c_2, \dots, c_n das Differentialgleichungssystem erfüllt, dem nach Levi-Civita die lebendige Kraft eines mechanischen Systems genügen muß, wenn die zugehörige Hamilton-Jacobische Gleichung durch Trennung der Veränderlichen integrierbar sein soll; es ist aber, wie unmittelbar einleuchtet, nicht möglich, φ so zu wählen, daß daraus eine in den p_i quadratische Form wird, wie dies Verf. bewiesen zu haben glaubt. Schoblik (Brünn).

Chazy, Jean: Oscillations isochrones dans un mouvement où la force dépend seulement de la position. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 621—624 (1940).

Verf. nimmt sich vor, ein Kraftgesetz zu finden, das die Schwingung eines materiellen Punktes auf einer geraden Linie mit einer von der Energiekonstante h unabhängigen Schwingungsperiode erzeugen soll. Diese Bewegung kann man als eine Verallgemeinerung der tautochronen Bewegung betrachten, wobei der Mittelpunkt des Schwingungsintervalles im allgemeinen mit h variiert. Verf. ermittelt eine Klasse von solchen Bewegungen, die die tautochrone Bewegung enthalten. — Ferner leitet Verf. das Kraftgesetz $X(x) = -m\omega_1^2 x$ für $x < 0$ und $X(x) = -m\omega_2^2 x$ für $x > 0$ ($\omega_1 \neq \omega_2$) ab, das ebenfalls einer isochronen Schwingung entspricht, die aber unsymmetrisch dem Nullpunkt gegenüber ausfällt. V. Válcovici (București).

Sémirot, Pierre: Chocs imaginaires dans le problème des trois corps. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 974—977 (1941).

On étudie dans cette note le caractère analytique des intégrales du problème des trois corps autour d'un choc imaginaire simple, double ou triple, correspondant à $t = 0$; une, deux ou trois distances mutuelles s'annulent, sans que leurs projections sur les axes des coordonnées soient nulles. — Dans le cas d'un choc simple les coordonnées sont des fonctions holomorphes de $t^{1/2}$, dépendant de 12 constantes arbitraires (résultat de J. Chazy). — Dans le cas d'un choc double les intégrales sont des fonctions holomorphes de $t^{1/3}$, dépendant de 10 constantes arbitraires. Si les trois corps forment à chaque instant un triangle isocèle, le nombre des constantes est égal à l'ordre du système différentiel. — Dans le cas d'un choc triple les coordonnées sont des fonctions holomorphes de $t^{1/2}$ et de $t \log t$, dépendant de 10 constantes arbitraires. Dans des cas particulières les logarithmes disparaissent. Kyrille Popoff (Sofia).

Nicolai, E. L.: Über die kräftefreie Bewegung eines Kreisels im Cardangehänge. Appl. Math. a. Mech., N. s. 3, Nr 4, 3—33 u. deutsch. Zusammenfassung 33—34 (1939) [Russisch].

Untersucht wird die Inertialbewegung eines vollkommen im Gleichgewicht befindlichen Kreisels im Kardangehänge unter Berücksichtigung der Masse des inneren und des äußeren Gehängerringes. Diese Massenwirkung verwickelt die bekannte einfache Bewegung des symmetrischen Kreisels. — Verf. zeigt, daß das Problem durch eine Integration in hyperelliptischen Funktionen gelöst wird. Als Anwendung untersucht Verf. die Stabilität eines solchen Kreisels in reiner Rotation (rasch umlaufender Kiesel); der Kiesel ist dann stabil. Ist der Kiesel in einer solchen Stellung, daß die Kieselachse mit der Achse des äußeren Ringes des Gehänges zusammenfällt, so sind die kleinen Schwingungen der Kieselachse nicht linear. Erteilt man ferner in dieser Stellung dem äußeren Ringe eine beliebig große Winkelgeschwindigkeit, so wird die Achse nicht gestört. Ob diese Stellung stabil oder instabil ist, hängt von der Größe und Richtung der genannten Winkelgeschwindigkeit ab. *Dolaptschiew (Sofia).*

Elastizität, Akustik:

Cisotti, Umberto: Sistemi continui conservativi. Atti Accad. Italia, VI. s. 2, 294—301 (1941).

Es wird im wesentlichen bewiesen: Läßt sich der Spannungstensor Φ_{ik} eines kontinuierlichen mechanischen Systems aus einem Potential 1. oder 2. Art ableiten (d. h. ist entweder $\Phi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$ oder $\Phi_{ik} = \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_k}$), so bilden die zugehörigen Volumkräfte im Falle eines Potentials 1. Art stets, im Falle eines Potentials 2. Art dann, wenn dieses Potential überdies harmonisch ist, ein konservatives System. Hierfür zwei Beispiele (Volumkräfte vom Typus Newtonscher Massen- bzw. Maxwellscher elektromagnetischer Kräfte). *Schoblik (Brünn).*

Weber, Constantin: Über die Minimalsätze der Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. 21, 32—42 (1941).

Es werden die Minimalsätze der Elastizitätstheorie unter möglichst geringen Einschränkungen in bezug auf Körpereigenschaften hergeleitet. Darunter befindet sich auch der Satz vom Minimum der „Ergänzungsarbeit“, d. h. derjenigen Arbeit, die im eindimensionalen Falle durch die zwischen Verformungskurve und Spannungsachse eingeschlossene Fläche dargestellt wird. Verf. benutzt diesen Satz, um bei nichtlinearem Elastizitätsgesetz (aber mit positiver zweiter Variation der Zerrungsenergie) Beziehungen für die Elastizitätskonstanten des betreffenden Körpers herzuleiten. — Der Satz wird vom Verf. Castigliano zugeschrieben. In der allgemeinen Fassung der vorliegenden Arbeit dürfte der Satz zuerst bei R. Ekwall in einer Polhem-Preisschrift (vgl. K. Ljungberg, Hållfasthetslära, S. 323. Stockholm 1932) angegeben worden sein (Anm. d. Ref.). *F. Odqvist (Djursholm).*

Cicala, Placido: Sulla stabilità dell'equilibrio elastico. Atti Accad. Sci. Torino 75, 185—222 (1940).

Dans la théorie mathématique classique de l'élasticité on suppose que les composantes de la tension soient des fonctions linéaires homogènes des composantes de la déformation (loi de Hooke). — Des travaux récents dus surtout à MM. Trefftz, Biezeno, Hencky, Southwell, ecc. ont pour but l'introduction de termes du second degré. Mais les différents auteurs font dépendre la stabilité de l'équilibre élastique de différentes équations. On propose ici une étude comparative des méthodes connues et des simplifications qui conduisent à une forme unique des équations physiquement définies. — Les résultats sont éclairés par un problème remarquable de la Technique, celui de la stabilité de l'équilibre d'une plaque cylindrique mince. *G. Lampariello.*

Frola, Eugenio: Sull'elasticità non globalmente lineare. Principii e fondamenti delle teorie. Atti Accad. Sci. Torino 75, 531—540 (1940).

Seit dem Trefftzschen Vortrage auf dem Mech.-Kongreß in Stockholm 1930 ist

das Problem der energetischen Begründung der Stabilitätstheorie vielfach erörtert worden (Biot, Zbl. Mech. 9, 145, Zbl. Mech. 9, 59; Kappus, Zbl. Mech. 10, 4 u. a.). Verf., der diese Arbeiten nicht zu kennen scheint, weist zunächst darauf hin, daß das Hookesche Gesetz und das Superpositionsgesetz zwei verschiedene Aussagen sind (das letztere setzt auch die Linearisierung der Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen voraus), und stellt sodann einen Ausdruck für die Formänderungsenergie auf, der die in den Rotationsgrößen $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ — nicht den Verzerrungsgrößen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$ — quadratischen Terme enthält, und der als Ausgangspunkt für die Stabilitätsrechnungen dienen soll, über die Verf. noch berichten will. [Der Energieausdruck, der ganz ähnlich von Biot angegeben wurde, eignet sich übrigens nur für Stabilitätsuntersuchungen; bei großen Verschiebungen (Elastika-Probleme o. ä.) ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ nicht mehr „Verzerrungs“-Größe — man greift hier zweckmäßig auf den von Kappus im Anschluß an Trefftz entwickelten Ausdruck zurück; s. zu der ganzen Frage auch Cicala, Zbl. Mech. 11, 16.]

Marguerre (Adlershof)._o

Cicala, Placido: Sulla teoria non lineare di elasticità. Atti Accad. Sci. Torino 76, 94—104 (1941).

Verf. stellt in großen Zügen die Trefftzsche Elastizitätstheorie beliebig großer Verschiebungen bei kleinen Verzerrungen dar, wobei er u. a. auf eine Arbeit des Ref. verweist (s. Kappus, Zbl. Mech. 10, 4). Die aus der Trefftzchen Theorie folgenden Gleichungen für Stabilitätsprobleme unterscheiden sich in gewissen Termen von denen anderer Autoren. Einige dieser Terme sind für eine große Klasse von Problemen unwesentlich, solange nur kleine Verzerrungen vorausgesetzt werden. (Ein Gegenbeispiel, auf das auch der Verf. eingeht, wird geliefert durch die Knickung eines sehr langen, auf Torsion beanspruchten Rohres: Greenhill-Knickung.) Verf. weist darauf hin, daß es nützlich wäre, allgemeine Kriterien zu finden, wann die oben erwähnten Terme weggelassen werden dürfen.

R. Kappus (Berlin-Adlershof)._o

Locatelli, Piero: Estensione del principio di St. Venant a corpi non perfettamente elastici. Atti Accad. Sci. Torino 75, 502—510 (1940).

Locatelli, Piero: Ancora sul principio di Saint Venant per corpi non perfettamente elastici. Atti Accad. Sci. Torino 76, 125—127 (1941).

Den Zanabonischen Beweis für das St.-Venantsche Prinzip (man findet ihn z. B. bei Biezeno-Grammel, Techn. Dyn., S. 80, Berlin 1940) vereinfacht Verf.: An einen durch eine Kräftegruppe Q deformierten Körper A (Formänderungsarbeit L_A) wird ein zweiter spannungsloser, genau passender Körper B angefügt; dann entlastet. Die im Körper AB verbleibende Energie Φ_{AB} ist gegeben durch $L_A - L_{AB}$ und wegen $\Phi_{AB} > 0$ folgt daraus $L_{AB} < L_A$, d. h. je größer der Körper, desto kleiner die von den Kräften Q geleistete Arbeit. Aus diesem Hilfssatz folgt das Prinzip wie bei Zanaboni. — Der Beweis läßt sich übertragen auf den quasielastischen Körper $[\sigma(\epsilon)$ nicht linear], unter der Voraussetzung, daß eine eindeutige Energiefunktion existiere (Fehlen von Hysteresiserscheinungen o. ä.). Die erste Note hatte gezeigt, daß die Wirkung einer Gleichgewichtsgruppe in hinreichender Entfernung unmerklich wird; für den eigentlich elastischen Körper folgt daraus, daß statisch gleichwertige Kräftegruppen elastisch gleichwertig sind. Beim quasielastischen Kontinuum aber, für das das Superpositionsprinzip nicht gilt, bedarf die Herleitung dieser zweiten Formulierung des St.-Venantschen Prinzips einer besonderen Überlegung, die Verf. kurz angibt.

Marguerre (Adlershof)._o

Locatelli, Piero: Sulla congruenza delle deformazioni. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 73, 457—464 (1940).

Nach dem Prinzip von Menabrea folgt die Verträglichkeit der Verzerrungen (hervorgerufen von im Gleichgewicht befindlichen Spannungen) aus der Forderung $\delta E = 0$, wobei E die in den Spannungen ausgedrückte Formänderungsarbeit ist.

Die vorliegende Note zeigt (unter Benutzung der Tensorschreibweise in sehr allgemeiner Form), daß das Prinzip unverändert auch für den quasielastischen Körper bestehen bleibt [$\sigma = \sigma(\varepsilon)$ nichtlinear], wenn man an die Stelle von E eine Funktion

$$F = \int_V [\sigma^{ik} \varepsilon_{ik} - \int \sigma^{ik} d\varepsilon_{ik}] dV$$

treten läßt. Die Funktion F nennt Verf. die „zweite“ Deformationsenergie; im deutschen Schrifttum bezeichnet man sie gewöhnlich als Ergänzungsarbeit.

Marguerre (Adlershof).

Locatelli, Piero: Estensione, flessione, torsione di corpi elastoplastici. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 73, 581—598 (1940).

Die Arbeit schließt sich an die vorige an. Sie diskutiert zunächst (wieder in Tensorsymbolik) ein Spannungs-Dehnungsgesetz, das in möglichst einfacher Weise den Übergang vom elastischen zum rein plastischen Verhalten des Werkstoffs vermittelt, und gibt dann als Anwendung die Theorie des gezogenen, des gebogenen und des tordierten Stabes, wie sie sich unter Beachtung dieses Spannungs-Dehnungsgesetzes darstellt. Ausgangspunkt ist jeweils die aus der klassischen Theorie geläufige Verteilung der Verschiebungen; die Spannungen folgen daraus. Bei Zug, Torsion und reiner Biegung erfüllen die Spannungen die Gleichgewichtsbedingung, bei Querkraftbiegung nicht. Der angenommene Formänderungszustand ist also nur in den ersten drei Lastfällen physikalisch möglich.

Marguerre (Adlershof).

Finzi, Bruno: Principio variazionale nella meccanica dei continui. Atti Accad. Italia, VII. s. 1, 412—417 (1940).

Verf. beweist den folgenden Tatbestand: Innerhalb der klassischen Elastizitätstheorie kann das Prinzip von Menabrea in der Form $\delta E = 0$ geschrieben werden, wobei E die (in den Spannungen ausgedrückte) Formänderungsarbeit ist. Gehört der Körper nicht dem Hookeschen Gesetz (erleidet aber nach wie vor kleine Deformationen), so braucht man nur eine neue Funktion $F = \int \sigma_{ik} \varepsilon^{ik} dV - E$ (in Tensorschreibweise) einzuführen, um in ähnlich einfacher Weise durch $\delta F = 0$ ein Variationsprinzip aussprechen zu können. Die Funktion F ist im deutschen Schrifttum als „Ergänzungsarbeit“ bekannt. In einem Schlußabschnitt behauptet Verf., daß das Prinzip $\delta F = 0$ auch bei endlichen Deformationen seine Gültigkeit behalt; aus der vom Verf. gegebenen Herleitung geht das aber nicht hervor.

Marguerre (Adlershof).

Savin, S. A.: Method of integral algebraical functions in the theory of elasticity of three dimensions. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 20, 1—37 (1941).

L'A. studia le soluzioni polinomiali delle equazioni dell'elasticità in tre dimensioni, nel caso di forza di massa costante. Egli si limita però alla sola determinazione di quali condizioni necessarie esse implicano per i coefficienti dei polinomi rappresentanti gli spostamenti e gli sforzi specifici, e non si preoccupa di giustificare la convergenza del procedimento in corrispondenza a forze superficiali le cui componenti non siano anche esse polinomi di grado finito.

Carlo Tolotti (Roma).

Savin, S. A.: Saint Venant's conditions of compatibility in the method of integral algebraical functions. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 20, 18—22 (1941).

Facendo seguito ad un suo precedente lavoro (s. vorsteh. Ref.) l'A. esamina come si scrivano le equazioni di compatibilità del Saint Venant quando le componenti degli sforzi siano dei polinomi di grado finito.

Carlo Tolotti (Roma).

Savin, S. A.: On some solutions of the equations of internal equilibrium of the theory of elasticity. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 20, 23—29 (1941).

L'A. fa un riassunto di soluzioni già note delle equazioni indefinite dell'elasticità in assenza di forze di massa.

Carlo Tolotti (Roma).

Berg, B. A.: Sur le problème à deux dimensions de la théorie d'élasticité pour une bande indéfinie. J. appl. Math. a. Mech., N. s. 4, 37—72 u. franz. Zusammenfassung 73—74 (1940) [Russisch].

Das allgemeine ebene Problem der Elastizitätstheorie isotroper Körper wird in der

Arbeit, analog der Methode von Tedone für dreidimensionale Probleme eines unendlichen, durch zwei parallele Ebenen begrenzten Körpers unter Anwendung der Greenschen Funktion ausführlich behandelt. Anschließend wird gezeigt, daß die gewonnenen Lösungen in mehreren Sonderfällen und speziellen Aufgaben mit den auf anderem Wege von zahlreichen Verff. bereits gefundenen übereinstimmen. *M. T. Huber.*

Platrier, Charles: Symétrie de révolution des tensions dans un milieu homogène isotrope en équilibre élastique. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 680—682 (1941).

Verf. gibt ein Beispiel für die Möglichkeit unsymmetrischer Formänderung bei symmetrischer Spannungsverteilung. — Derartige Fälle lassen sich in der Regel durch die Theorie der Dislokationen erklären (Anm. d. Ref.). *H. Neuber* (Braunschweig).

Müller, Emil: Rechteckige Platten, die an allen vier Seiten durch elastische Träger unterstützt sind. Ing.-Arch. **12**, 37—52 (1941).

Das Problem der Rechteckplatten, die an zwei gegenüberliegenden Rändern fest unterstützt und frei drehbar gelagert sind, wird mit Hilfe des bekannten Ansatzes von M. Lévy erledigt, wobei die Auflagerung an den beiden anderen Rändern ganz beliebig sein darf. Läßt man die Voraussetzung der unnachgiebigen und gelenkigen Auflagerung fallen, so liegt eine wesentlich andere Aufgabe vor, z. B. wenn die Platte an allen Rändern auf elastischen Trägern ruht. Für diesen Fall gibt Verf. eine Lösung an, wobei gelenkige Auflagerung an allen Rändern angenommen wird. Die Durchbiegung wird aus drei verschiedenen Anteilen zusammengesetzt: 1. Durchbiegung ζ_p infolge der Belastung p bei unnachgiebiger Lagerung aller Ränder; 2. Durchbiegung ζ_n infolge von Linienlasten $q_n = \cos \frac{n\pi x}{2a}$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) an den Rändern $y = \pm b$, wenn die Platte an diesen auf den Trägern elastisch, an den Seiten $x = \pm a$ unnachgiebig gelagert ist, und 3. Durchbiegung $\bar{\zeta}_n$ infolge von Linienlasten $\bar{q}_n = \cos \frac{n\pi y}{2b}$ an den Rändern $x = \pm a$, wenn die Platte an diesen auf den Trägern elastisch, an den Seiten $y = \pm b$ unnachgiebig gelagert ist. Die verschiedenen Anteile der Durchbiegung erfüllen streng die Differentialgleichung, ebenso werden die Randbedingungen streng befriedigt. Die allgemeine Durchführung der Rechnung wird ausführlich dargestellt und an einem Zahlenbeispiel erläutert, wobei die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens gezeigt wird.

Gran Olsson (Trondheim).

Fridman, M. M.: Über einige Fragen der Theorie der Biegung von dünnen isotropen Platten. J. appl. Math. a. Mech. **5**, Nr 1, 93—102 u. dtsch. Zusammenfassung 103 (1941) [Russisch].

In vorliegender Arbeit wird die Biegung einer dünnen, isotropen, kreisringförmigen Platte, sowie einer unendlich ausgedehnten Platte mit kreisrunder Öffnung bei Belastung durch Randmomente und Randscherkräfte behandelt. Das Lösungsverfahren lehnt sich an die von Muschelišwili herrührende Methode der Behandlung des ebenen Problems in komplexen Variablen an.

S. Woinowsky-Krieger (Berlin).

Tolotti, Carlo: Applicazione di un nuovo metodo di M. Picone all'integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo. Atti Accad. Ital., VII. s. **1**, 514—524 (1940).

L'auteur se propose à déterminer les déplacements élastiques u, v, w dans un parallélépipède rectangulaire des dimensions $2a, 2b, 2c$ par rapport à ses axes de symétrie, en appliquant une méthode générale de Picone [Rend. Semin. mat. fis. Milano **13**, 66—90 (1939); ce Zbl. **25**, 54]. En désignant, comme d'habitude par $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ les composantes de l'effort en un point (x, y, z) , on suppose les $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ connus sur les deux bases $z = \pm c$, tandis que sur les faces latérales on se donne soit u, v, w , soit $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{zx}$ sur $x = \pm a$ et $\sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xy}$ sur $y = \pm b$. En introduisant dans le système d'équations indéfinies d'équilibre, ainsi que dans les conditions aux limites, comme nouvelles fonctions, les transformées de Fourier

$u^*(\xi, \eta, z) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b u(x, y, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy$ et les analogues, le problème est ramené, en

premier lieu, à l'intégration d'un système de trois équ. diff. linéaires à coefficients constants en u^*, v^*, w^* , la variable indépendante étant z et avec des conditions aux limites bilocales en $z = \pm c$. Les seconds membres de ces équ. ainsi que les conditions aux limites introduisant à la fois les efforts et les déplacements sur les faces latérales, l'idée de la méthode de Picone consiste à déterminer celles des fonctions que ne sont pas connues sur $x = \pm a, y = \pm b$, en exigeant que u^*, v^*, w^* soient des fonctions entières en ξ, η pour les valeurs complexes de ces paramètres. Dans le cas traité, l'A. tire ces conditions de l'application du théorème de réciprocité de Betti. On obtient de la sorte un système d'une infinité d'équ. intégrales du type de Fischer-Riesz, mais il n'est pas encore démontré que ce système soit suffisant pour déterminer les fonctions cherchées. — Enfin la solution du problème d'équilibre posé, en en supposant l'existence, doit avoir la forme

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4ab} \sum_{h,k} u^* \left(\frac{h\pi}{a}, \frac{k\pi}{b}, z \right) e^{i\pi \left(\frac{hx}{a} + \frac{ky}{b} \right)},$$

les séries doubles convergeant uniformément dans tout domaine tel que $|x| < a, |y| < b, |z| < c$. Le travail sera développé ultérieurement dans un mémoire détaillé.

N. Théodoresco (Bukarest).

Odone, Vincenzo: Onde trasversali di una sbarra originate da oscillazioni anisotrone di un'estremità. Atti Accad. Sci. Torino **76**, 248—257 (1941).

Das eingespannte Ende eines elastischen Stabes wird zu stationären Schwingungen angeregt, die von beliebiger Art — d. h. nicht notwendig sinusförmig — sein können, und zwar zu Querschwingungen senkrecht zur Stabachse, denen Drehschwingungen der Einspannung überlagert sind. Das andere Stabende ist frei. Der Widerstand des Mittels wird proportional zur absoluten Geschwindigkeit des Stabteilchens angenommen. Die Bestimmungsgleichung des Problems ist eine Differentialgleichung vierter Ordnung mit einem Störglied $p(x, t)$ auf der rechten Seite; sie wird durch den Produktansatz $\sum X(x)Y(t)$ gelöst. Wenn p ebenfalls in der Produktform $\sum \xi(x)\eta(t)$ ausdrückbar ist, so bilden die ξ ein orthogonales Funktionensystem. Für harmonische Anregung wird insbesondere die Frage der Resonanz mit den Eigenschwingungen behandelt und das Verhältnis der Schwingungsweiten der beiden Stabenden im Resonanzfalle berechnet. — Das Ziel der Arbeit ist, die Wirkungsweise eines physikalischen Apparates zu untersuchen, der zu Schwingungen der bezeichneten Art angeregt wird.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Biezeno, C. B.: Critical speeds of rotating shafts. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **43**, 1144—1152 (1940).

In dinamica tecnica è noto che un'asta rapidamente rotante appoggiata in modo staticamente determinato o indeterminato, portante un numero n di masse concentrate (di fronte alle quali la massa dell'asta è trascurabile) è suscettibile di n differenti velocità angolari critiche al massimo. L'autore dimostra che siffatte velocità sono esattamente n ed anzi i reciproci dei loro quadrati sono radici di un'equazione secolare di grado n (cfr. C. B. Biezeno-R. Grammel, Technische Dynamik, Springer, Berlin).

G. Lampariello (Messina).

Kretchmer, B. B.: On some applications of the theory of longitudinal impact. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **28**, 585—589 (1940).

Basandosi sulla teoria dell'urto longitudinale che risale al Saint-Venant è data una soluzione di un problema posto dal Guerseyanoff per lo studio delle discontinuità di velocità all'estremo di un'asta incastrata in un mezzo deformabile di cui l'altro estremo è sottoposto ad una percossa. I risultati del calcolo sono stati confermati dalle esperienze eseguite in un ponte sul fiume Volga a Gorky. *G. Lampariello.*

Lechnickij, S. G.: Biegung nichthomogener anisotroper symmetrisch aufgebauter dünner Platten. *J. appl. Math. u. Mech.* 5, Nr 1, 71—91 u. dtsh. Zusammenfassung 92 (1941) [Russisch].

Der Verf. untersucht die Biegung querbelasteter, dünner, über ihre Dicke nicht homogener Platten, deren elastische Eigenschaften symmetrisch zu der Plattenmittellinie sind. Im einzelnen werden behandelt: 1. Eine aus einer ungeraden Anzahl anisotroper Schichten aufgebaute Platte, wobei ein Gleiten der Schichten an ihren Berührungsebenen ausgeschlossen wird. 2. Eine anisotrope Platte mit Elastizitätskonstanten, die über die Plattendicke stetig veränderlich sind. Es wird die Gültigkeit des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes für jedes Plattenelement angenommen und von den Vereinfachungen der Kirchhoffschen Plattentheorie Gebrauch gemacht. Verf. drückt die Schnittkräfte der Platte durch ihre Durchbiegung aus und erhält für die letztere eine partielle Diff.Gl. 4. Ordnung mit Beiwerten, die von den Elastizitätskonstanten abhängig sind. Im Sonderfalle lauter orthotroper bzw. isotroper Schichten weist die Diff.Gl. dieselbe Form auf wie bei einer einfachen orthotropen bzw. isotropen Platte. Die zugehörigen reduzierten Plattensteifigkeiten lassen sich hierbei durch die Moduln einzelner Schichten ausdrücken. Die Theorie wird durch Beispiele erläutert.

S. Woinowsky-Krieger (Berlin)._o

Hydrodynamik:

Pinl, M.: Zur geometrischen Deutung und Transformation der Grundgleichung der ebenen kompressiblen Potentialströmung. *Z. angew. Math. Mech.* 21, 80—85 (1941).

Die Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential der ebenen adiabatischen kompressiblen Potentialströmung läßt sich nach G. Braun [*Ann. Physik*, V. F. 15, 645—676 (1932); dies. Zbl. 6, 61] als Eulersche Gleichung des Variationsproblems

$$\delta \iint [\lambda + \mu(p^2 + q^2)]^r dx dy = 0$$

auffassen. Auf dieses lassen sich die von Duschek [*S.-B. Akad. Wiss. Wien* 135, 1—8 (1926); 136, 265—270 (1927)], Haar [*Math. Ann.* 100, 481—502 (1928)] und Berwald [*Mh. Math. Phys.* 38, 89—100 (1931); dies. Zbl. 1, 339] aufgestellten Begriffsbildungen der Relativgeometrie anwenden. Verf. führt das durch und zeigt insbesondere, wie sich gewisse Normalformen der Differentialgleichung deuten lassen als Darstellung der Lösungsflächen in relativisotropen bzw. relativisothermen bzw. Relativ-Krümmungslinien-Parametern. Zum Schluß werden Differentialgleichungen für die adjungierten Extremalflächen aufgeschrieben.

Gericke (Neuruppin).

Görtler, H.: Gasströmungen mit Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten. (*Kaiser Wilhelm-Inst. f. Strömungsforsch., Göttingen.*) *Z. angew. Math. Mech.* 20, 254—262 (1940).

Die Bewegungsgleichung wirbelfreier ebener Gasströmungen kann man nach einer von Prandtl herrührenden Vorschrift leicht linearisieren, falls die Strömung nicht sehr von einer gleichförmigen Parallelströmung abweicht. Durch Iteration verbessert der Verf. die so gewonnenen Ausgangsnäherungen, um einen Übergang von Unterschall- zu Überschallströmungen zu erhalten. Beim ersten Beispiel geht er von einer Unterschallströmung aus und bekommt eine Strömung längs einer gewellten Wand. Beim zweiten Beispiel liefert die Verbesserung einer Überschallströmung eine Strömung zwischen entgegengesetzt welligen Wänden. In beiden Fällen wird die Schallgeschwindigkeit durchschritten.

W. Tollmien (Dresden)._o

Roy, Maurice: Sur la stabilité des ondes de choc orthogonales dans un écoulement par tranches. *C. R. Acad. Sci., Paris* 212, 369—371 (1941).

Rein auf Grund des zweiten Hauptsatzes und der Gleichungen für stationäre Strömungen sind Verdichtungsstöße sowohl bei beschleunigter als auch bei verzögerter Zuströmung möglich. Indem er dieser stationären Grundströmung kleine Störungen überlagert, zeigt der Verf., daß hiervon nur die Fälle mit beschleunigter Zuströmung (d. h. Strömungen in einem sich erweiternden Kegel) stabil sind.

A. Busemann._o

Havelock, T. H.: The pressure of water waves upon a fixed obstacle. Proc. roy. Soc., Lond. A 175, 409—421 (1940).

In einer früher referierten Arbeit (vgl. Zbl. Math. 10, 40) erklärte Kreitner die Widerstandserhöhung eines Schiffes im Seegang durch die Reflexion der Meereswellen am Schiff. Verf. überprüft nun diese Hypothese mit den Mitteln der modernen Wellentheorie. Er beschränkt sich auf ruhende, unendlich tiefe, von gleichförmigem Seegang betroffene Körper mit senkrechten Wänden und errechnet hierfür die Wellenerhebung (bis zur 2. Ordnung) an der Körperkontur sowie die resultierenden Drücke (Zusatzwiderstand). Als der analytischen Behandlung zugängliche Beispiele wählt er: die unendlich ausgedehnte Platte senkrecht zur Wellenfortschrittsrichtung; dieselbe Platte, jedoch schief zur Welle; Körper mit elliptischem und mit parabolischem Horizontalschnitt (Wasserlinie); Körper mit schiffsähnlichem Querschnitt. Das letzte Beispiel wird durch eine mit der Seegangsfrequenz pulsierende Quell-Senken-Belegung gelöst. Im übrigen sind die in der Wellentheorie üblichen Einschränkungen gemacht, so daß die Genauigkeit vorliegender Untersuchung mit der durch die Theorie allgemein erreichten übereinstimmt. Das Ergebnis bestätigt zunächst, daß die Wellenzüge 1. Ordnung (normaler, ungebrochener Seegang) oszillierende Drücke ergeben, deren Gesamtwirkung Null ist, und daß auch gemäß Kreitners Hypothese die Wellen 2. Ordnung (Reflexionswellen) einen Zusatzwiderstand erzeugen. Andererseits ist die Größe des derart theoretisch ermittelten Widerstandes nur etwa $\frac{1}{5}$ des von Kreitner überschläglichs errechneten und ebenfalls nur ein Bruchteil des bei Schiffen im Seegang beobachteten Zusatzwiderstandes. Bemerkenswert ist ferner, daß der Reflexionseinfluß mit zunehmender Wellenlänge abnimmt. Es folgt also, daß die Wellenreflexion nur einen Bruchteil des Zusatzwiderstandes im Seegang erklären kann und daß noch weitere Einflüsse vorhanden sein müssen, für die der Verf. benennt: Einfluß der Fahrtgeschwindigkeit und der Schiffsschwingungen, Änderung des Stillwasser-Wellen-Widerstandes und evtl. Phasenverschiebungen, die das zeitliche Gleichgewicht der Wellendrücke 1. Ordnung aufheben.

H. Dickmann (Stettin).

Cagniard, L.: Sur la propagation du mouvement dans les milieux visqueux. Ann. Phys. Paris, XI. s. 13, 239—265 (1940).

Étude de la solution du problème mixte pour l'équation $a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ des petits mouvements dans un milieu visqueux avec les conditions initiales $u = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ pour $t = 0$ et $x \geq 0$; $u(t, 0) = F(t)$ avec $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$, $F(t)$ étant une fonction donnée de t . Le travail fait suite à ceux de Duhem et L. Roy. L'A. utilise la méthode d'intégration de Carson en mettant la solution sous

la forme $u(t, x) = \int_0^t F(v) \frac{\partial A(v, x)}{\partial v} dv$, $A(v, \xi)$ étant donnée par l'équation intégrale

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{p\xi}{V^2}} = \int_0^\infty e^{-pv} A(v, \xi) dv$$

avec $x = \frac{a^2}{V} \xi$; $t = \frac{a^2}{V^2} \tau$, p étant un paramètre. La solution obtenue est continue avec toutes ses dérivées, donc impossibilité de propagation d'ondes. La propagation est instantanée, il n'y a donc pas de front d'onde. Pour des grandes

valeurs de ξ , on a $A(v, \xi) \sim \frac{1}{2} \left[1 + \theta \left(\frac{v - \xi}{\sqrt{2\xi}} \right) \right]$ avec $\theta(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-u^2} bu$. L'intervalle $[\xi - \frac{1}{2} W_{\xi, \tau}(\eta), \xi + \frac{1}{2} W_{\xi, \tau}(\eta)]$ de largeur $W_{\xi, \tau}(\eta)$ dans lequel v varie pour ξ donné et assez grand, pour que $A(v, \xi)$ passe de la valeur η à la valeur $1 - \eta$ ($0 < \eta < \frac{1}{2}$) définit la pseudo-onde et l'on a $W_{\xi, \tau}(\eta) = K(\eta)$, où $K(\eta)$ est une fonction décroissante de η , $K(\frac{1}{2}) = 0$, $\lim_{\eta \rightarrow 0} K(\eta) = \infty$. Pour $a \rightarrow 0$, la pseudo-onde devient la quasi-onde

de Duhem, dont l'épaisseur est de l'ordre de a . La solution est continue aussi par rapport à V pour $V \rightarrow 0$, lorsque l'équation donnée devient l'équation de la chaleur.

N. Théodoresco (Bukarest).

Burgers, J. M.: Some considerations on the development of boundary layers in the case of flows having a rotational component. (*Laborat. v. Aero- en Hydrodyn., Techn. Hoogeschool, Delft.*) Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 13—25 (1941).

Es werden die Bewegungsgleichungen der Grenzschichtströmung diskutiert für den Fall, daß die Potentialströmung oder der angeströmte Körper eine Drehbewegung besitzen. Die Betrachtungen gelten sowohl für die laminare als auch für die turbulente Grenzschicht. Im einzelnen werden die folgenden beiden Fälle näher untersucht: 1. Grenzschicht an einem in Achsrichtung angeströmten, in Ruhe befindlichen Rotationskörper, bei welchem die Potentialströmung eine Umfangskomponente besitzt (z. B. herrührend von einem Gebläse oder Leitapparat, welcher sich vor dem Körper befindet). 2. Grenzschicht an einem in Achsrichtung angeströmten Rotationskörper, welcher um seine Achse rotiert, in rein axialer Potentialströmung. — Ergebnisse: Im Falle 1 ist am vorderen Teil des Körpers (wo der Körperdurchmesser stromabwärts zunimmt) mit Drehung die Ablösungsgefahr größer als ohne Drehung; am hinteren Teil mit Drehung geringer als ohne Drehung. Im Falle 2 ist am vorderen Teil des Körpers die Ablösungsgefahr mit Drehung geringer als ohne Drehung und am hinteren Teil mit Drehung größer als ohne Drehung. Dies rührt im Falle 2 daher, daß durch die Zentrifugalkraft das Grenzschichtmaterial in Richtung des größten Durchmessers getrieben wird. Aus einer Impulsbetrachtung werden für den Fall 2 Abschätzungsformeln hergeleitet, für die erforderliche Drehwinkelgeschwindigkeit zur Verhinderung der Ablösung bei vorgegebener Potentialströmung. Die obigen Aussagen gelten nur, solange der Strömungszustand längs des ganzen Körpers einheitlich ist (voll laminar oder turbulent). In Fällen, wo infolge der Drehung ein Wechsel der Strömungsform eintritt, werden die angegebenen Wirkungen möglicherweise überdeckt von Einflüssen, welche mit dem Umschlag laminar/turbulent zusammenhängen. H. Schlichting.

Thermodynamik:

Maisel, W. M.: A generalization of the Betti-Maxwell theorem to the case of thermal stressed condition and some cases of its application. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 30, 115—118 (1941).

In einem ungleichförmig erhitzten elastischen Körper ruft der von der Temperatur T herrührende Verzerrungsanteil im Ausdruck für die Formänderungsenergie einen Zusatzterm hervor, der die Form des Betti-Maxwellschen Reziprozitätssatzes modifiziert. — Indem er den einen der beiden Körper als unerhitzt ansieht, gibt Verf. einige Spezialisierungen, die zeigen, wie dieser erweiterte Reziprozitätssatz dazu dienen kann, aus bekannten Lösungen des statischen Problems die des zugehörigen thermoelastischen zu gewinnen.

Marguerre (Adlershof).

Charron, Fernand: Répartition de la chaleur entre deux corps frottants. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 478—480 (1941).

La résolution du problème de la distribution de la chaleur dégagée par le frottement de deux disques A et B pressés mutuellement suivant une section droite et tournant l'un par rapport à l'autre est ramenée à l'intégration de l'équation $\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ avec $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ où l'on pose $u(x, \tau) = -\frac{\partial t}{\partial x}$, en désignant par τ le temps, x la distance du point à la section droite et t la température. Les conditions aux limites sont $u = 0$ pour $\tau = 0$, x quelconque; $u = u_0$ pour $x = 0$ et $u = 0$ pour $x = \infty$, quel que soit $\tau > 0$.

Finalement on a t par la formule $t = \frac{au_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau$ avec $u_0 = \left(-\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0}$. La face de

contact $x = 0$ s'échauffe proportionnellement à la racine carrée du temps et les quantités de chaleur dans les deux corps A et B sont proportionnelles à l'expression $\frac{k}{a} = \sqrt{kc\rho}$, résultat trouvé déjà par l'A. [C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1796 (1938)] et donné antérieurement par Vernotte [C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1286—1288; ce Zbl. **19**, 217].

N. Théodoresco (Bukarest).

Fischer, J.: Beharrungstemperatur und Anzeigegeschwindigkeit einfacher Thermometer (Thermokreuze). Ing.-Arch. **11**, 328—335 (1940).

Una discussione è fatta di un problema di propagazione del calore. Si tratta della determinazione della temperatura d'inerzia (Beharrungstemperatur) e della velocità d'indicazione (Anzeigegeschwindigkeit) di un semplice tipo di trasformatore termico, dominata dall'equazione del calore di cui si ricerca una soluzione soddisfacente a determinate condizioni iniziali ed al contorno.

G. Lampariello (Messina).

Tscherpakow, P. W.: Über die Wärmeabgabezahl in einem zylindrischen Rohr. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **29**, 300—303 (1940).

Nusselt hat [Z. Ver. Deutsch. Ing. **54**, 1154—1158 (1910)] den Wärmeübergang von einem zylindrischen Rohr auf eine durch das Rohr strömende Flüssigkeit unter der Annahme axialsymmetrischer Verhältnisse durch die sog. Wärmeübergangszahl

$\alpha(z) = - \frac{\lambda \left(\frac{\partial T(r, z)}{\partial r} \right)_{r=r_0}}{T(z)}$ gekennzeichnet, wo r, z Zylinderkoordinaten, $2r_0$ den Rohrdurchmesser, λ die Wärmeleitzahl und $T(r, z)$ die Temperatur an der Stelle (r, z) der

Flüssigkeit bedeuten; $\bar{T}(z)$ steht für den Mittelwert $\frac{\int_0^{r_0} T r dr}{\int_0^{r_0} r dr}$. Indem Verf. $\bar{T}(z)$ durch $\frac{\int_0^{r_0} T r u dr}{\int_0^{r_0} r u dr}$ ersetzt, unter $u(r)$ die Strömungsgeschwindigkeit im Abstand r von der Mittel-

achse verstanden — ohne allerdings diese Abweichung auch nur mit einem Wort zu begründen —, gelingt es ihm, den Mittelwert dieser (von der üblichen abweichenden, aber weiterhin als Nusseltsche bezeichneten) Wärmeübergangszahl über ein Rohrstück

der Länge l , also $\frac{1}{l} \int_0^l \alpha(z) dz$ in einfachster Weise durch die Mittelwerte der Temperatur

an den beiden Endflächen des Rohrstückes auszudrücken. Verf. leitet dann eine ähnliche Darstellung auch noch für den Fall her, daß der bei Nusselt vernachlässigte Wärmeleitungsanteil in Richtung der Strömung ebenfalls berücksichtigt wird, allerdings unter der einschränkenden Annahme einer von r unabhängigen Strömungsgeschwindigkeit u . Letztere Herleitung ist nicht einwandfrei, da hierbei die Wärmeübergangszahl $\alpha(z)$, die doch im allgemeinen noch Funktion von z ist, wie eine Konstante behandelt wird. Es ist nicht zu ersehen, ob dies unabsichtlich oder mit Absicht geschieht; in letzterem Falle müßte freilich die Zulässigkeit dieses dann bloß als Näherung zu wertenden Verfahrens näher begründet werden.

Schoblik (Brünn).

Grünberg, G.: Über die Kurzschlußerwärmung von Hochspannungskabeln. J. Physics Acad. Sci. USSR **4**, 463—472 (1941).

Voraussetzungen: In der Ader wird wegen ihrer großen Wärmeleitfähigkeit der Temperaturgradient vernachlässigt. Da der Kurzschluß nur 3—6 sec dauert, wird die Verschiebung des innerhalb der hohlzylindrischen Ader sich befindenden Öls vernachlässigt. Da die Kurzschlußwärme während der Kurzschlußdauer praktisch in der Isolation nur in einer 2—3 mm dicken Schicht sich bemerkbar macht, also den Bleimantel nicht erreicht, wird die Dicke der Isolation unendlich groß angenommen. Führt man statt der Radialkoordinate r den Abstand von der Ader und statt der Temperatur θ

die Veränderliche $\sqrt{r/r_k}\theta$ ein, worin r_k der von 0 und ∞ verschiedene Randwert der Radialkoordinate im Öl oder in der Isolation ist, so wird die axialsymmetrische Aufgabe auf eine Ebene mit räumlicher Wärmeentwicklung zurückgeführt; da letztere einen Fehler von nur einigen hundertstel Prozent verursacht, wird sie vernachlässigt. — In der Riemann-Mellinschen Umkehrformel ist die Exponentialfunktion mit einer echt gebrochenen rationalen Funktion multipliziert. Diese wird in Teilbrüche zerlegt und jeder der letzten binomisch entwickelt. Die einzelnen Summanden werden mit der Fakultät integriert. Die Summe mit ganzen Exponenten ergibt die Exponentialfunktion. Für die Summe mit gebrochenen Exponenten wird eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, einer Potenz als Störungssummand und einer Anfangsbedingung aufgestellt. Ihre Lösung wird durch das Fehlerintegral ausgedrückt. Die Operatorenmethode kann auch bei veränderlichem Kurzschlußstrom angewandt werden, wenn der Temperaturkoeffizient des Aderwiderstandes vernach-

lässigt wird. (Anmerk. des Ref.: Auf S. 470 muß in der Formel $q' = \int_0^\infty w dx$ nicht über den Rauminhalt eines Stabes, sondern eines Sektors integriert werden, so daß im Integranden der Faktor $\frac{(r_s + x)^2}{r_s^2}$ fehlt. Auf S. 471 wird die Behauptung $u_1 \geq u$ nicht begründet.)
Ludwig (Hannover).

Elektrodynamik:

Grünberg, G.: Über die Verteilung der Elektrizität auf dünnen nicht geschlossenen leitenden Oberflächen. *Ž. eksper. teoret. Fiz.* **11**, 536—543 (1941) [Russisch].

Verf. rechnet die Verteilung der Ladungen auf einem dünnen (im Grenzfall unendlich dünnen) flächenhaften Leiter nach, der keine geschlossene Hülle bildet und sich in einem elektrischen Felde befindet. Er findet dabei, daß der Unterschied der Ladungen auf der Innen- und Außenseite des dünnen flächenhaften Leiters nicht von der Form der Berandung des betrachteten Flächenteiles abhängt, sondern nur vom Potential des Leiters und der Stärke des äußeren Feldes. Friedrich Loebner (Bochum).

Optik:

Korringa, J.: Classification of aberrations in rotationally symmetrical optical systems. (*Laborat. v. Techn. Phys., Delft.*) *Physica*, Haag **8**, 477—496 (1941).

Der Verf. geht von der Arbeit M. Herzbergers (dies. Zbl. **22**, 91) aus. Er gibt die Herzbergerschen Koeffizienten für die Fehler 3. und 5. Ordnung und leitet auch Herzbergers Formeln für die Verschiebung von Ding und Blende in etwas anderer Form ab. Er erwähnt dann die von T. Smith [*Trans. Opt. Soc.* **23**, 311—322 (1921/22)] eingeführte Einteilung der Fehler in Gruppen, dadurch lassen sich die Formeln in einigen Fällen vereinfachen. — Im zweiten Teile der Arbeit werden zunächst die Fehlerausdrücke für eine einzelne (kuglige oder unkuglige) Fläche angegeben (S. 488 bis 489), wo der Gegenstand im Scheitel, die Blende im Krümmungsmittelpunkt liegt. Die Verschiebungsformeln gestatten, mehrere Flächen zusammenzusetzen (allgemeine Formeln S. 492—494). Zum Schluß wird ein Beispiel behandelt. Hans Boegehold.

Thomescheit, Alfred: Trigonometrische Durchrechnung von Strahlen bei dezentrierten optischen Systemen aus sphärischen Flächen. *Z. Instrumentenkd.* **61**, 201—208 (1941).

Da die wirklich hergestellten optischen Systeme von der in den Rechnungen vorausgesetzten vollkommenen Ausrichtung etwas abweichen werden, so gibt der Verf. Formeln zur Berücksichtigung dieses Unterschiedes. Er nimmt an, daß alle Dezentrierungen in einer Ebene erfolgen und beschränkt sich auf Strahlen, die in dieser Meridianebene verlaufen. Unter solchen Umständen sind die Formeln für den Öffnungsfehler sowohl wie für den Zwischalenfehler (Astigmatismus) leicht zu verallgemeinern. Der Verf. bezieht alles zuerst auf die „(ideale) zentrierte Achse“, später auf den Hauptstrahl, der „vor dem Durchgang durch das System — in bezug auf die zentrierte Achse — Paraxialstrahl ist“. Die Querabweichungen mißt er in der meridionalen

Bildebene. Als Beispiel wird ein zweiteiliges Fernrohrobjektiv gewählt, Verf. gibt Abweichungswerte zunächst für die vier Fälle, wo eine der Flächen um $4'$ verschwenkt ist, dann für die gleiche Verschwenkung aller 4 Flächen, und zwar so, daß sich die Abweichungen summieren. Er kommt zu recht merklichen Abweichungen, insbesondere Asymmetrien. Auch für einen Punkt, der auf der „zentrierten Achse“ liegt, muß ein Zweischalenfehler auftreten, doch ist dessen Betrag nur gering. — (Der Verf. gibt keine allgemeine Erklärung dafür, welche Linie man sich unter der idealen Achse zu denken hat, wie mir scheint, sind die Abweichungswerte von der Wahl dieser Linie sehr abhängig; der Ref.)

Hans Boegehold (Jena).

Korff, Günther: Zum Gausschen Prinzip der Totalundeutlichkeit. *Z. Instrumentenkde* **61**, 208—212 (1941).

Gauß verlangt in seinem Briefe an Brandes, daß für die Seitenabweichungen des Öffnungsfehlers die Regel befolgt wird $U = \int y^2 i ds = \min$. Hier ist ds ein Flächenelementchen des Abweichungskreises, y sein Abstand von der Achse, i die Strahlenintensität in ds . Die „Totalundeutlichkeit U “ läßt sich auch auf die Form bringen $U = \int (e - z)^2 f(h) dh$, wo h der Abstand eines achsenparallel einfallenden Strahls, z seine Längsabweichung, e der Abstand der Einstellebene von der Gaußschen Bildebene ist. z hat die Form $z = \sum a_n h^{2n}$, Gauß beschränkt sich auf die beiden ersten Koeffizienten a_1 und a_2 , er drückt a_1 durch a_2 und die abweichungsfreie Zone h_0 aus. Er sucht dann zunächst die beste Einstellung bei gegebener Zone. Der bleibende Fehler U_e hat die Form $U_e = a_2^2 g(h_0)$. Die beste Hebung des Öffnungsfehlers will Gauß erreichen, indem er U_e zu einem Minimum macht, wobei er a_2 als konstant annimmt. Der Verf. verweist darauf, daß bei den üblichen Variationen einer optischen Linsenfolge (Umbiegungen usw.) a_2 nicht ungeändert bleibe, so daß die Gaußsche Regel wenig Vorteile biete. Eine 1920 von K. W. J. Kohlrausch angegebene Änderung unterliegt grundsätzlich denselben Bedenken. Korff gibt dann einen Ansatz, wie die beste Fehlerhebung als Funktion sämtlicher verfügbaren Größen (Halbmesser, Dicken, Abstände, Brechungsverhältnisse) darzustellen ist, wobei man noch beachten muß, daß außer dem Öffnungsfehler noch andere Abweichungen zu berücksichtigen sind und daß einige Größen, wie Dicken, Brechungsverhältnisse oft nicht oder wenig geändert werden können oder sollen.

Hans Boegehold (Jena).

Moon, Parry: Interreflections in lightwells. *J. opt. Soc. Amer.* **31**, 301—308 (1941).

Ein vertikaler, hohler und nach oben geöffneter Zylinder wird von einem Himmel gleichmäßiger Leuchtdichte beleuchtet. Die Wände des Zylinders seien vollkommen diffus zerstreuernd. Es ist die Leuchtdichte des Bodens und der Wände, deren Absorptionskoeffizienten gegeben sind, zu bestimmen. Dieses Problem ist bei der Berechnung der Beleuchtungsverhältnisse in Straßenzügen und Hinterhöfen von Wichtigkeit. Die Lösung wird durch eine Integralgleichung zweiter Art mit kompliziertem, symmetrischem Kern gegeben. Die numerische Auswertung dieser Gleichung ist äußerst mühevoll. Es werden daher vom Verf. für verschiedene Fälle, die in der Praxis vorkommen, Gleichungen mit einfacheren Kernen vorgeschlagen, und die Lösungen mit der Erfahrung verglichen.

R. Ullrich (Prag).

White, Walter T.: Calculation of the light distribution in lightwells. *J. opt. Soc. Amer.* **31**, 308—317 (1941).

Es wird dasselbe Problem wie im vorstehenden Referat untersucht. Die Integralgleichung wird zuerst durch sukzessive Approximation gelöst. Die dabei auftretenden Integrale von der Form $\int_a^b K(x, t) u(x) dx$ werden mit einem Instrument, genannt

„cinema integrator“, ausgewertet. Dieses Instrument besteht im wesentlichen aus zwei Filmen, deren durchlässige Teile von den Kurven $K(x, t)$ und $u(x)$ begrenzt werden. Beleuchtet wird mit einer strichförmigen Lichtquelle. Die gesamte durchgelassene Lichtenergie ist dem numerischen Wert des Integrals proportional. Die Leuchtdichten-

verteilung im runden und rechteckigen Zylinder mit vollkommen diffus reflektierenden Wänden und vollkommen absorbierendem Boden wird genau berechnet. In diesen Fällen ist die Leuchtdichte in halber Zylinderhöhe gleich der Hälfte der Leuchtdichte des Himmels. Für die Leuchtdichtenkurve ist diese halbe Höhe ein Symmetriepunkt. Die Leuchtdichte nimmt beinahe linear mit der Höhe ab. Die Restfunktion, die die Abweichung von der geraden Linie angibt, genügt einer Integralgleichung, die mit dem „cinema integrator“ ausgewertet wird. Eine andere Methode, die Leuchtdichtenkurve genau zu bestimmen, besteht in der Approximierung dieser Kurve durch einen gebrochenen Linienzug. Durch Einsetzen in die Integralgleichung erhält man ein System von linearen Gleichungen, das die Bestimmungstücke des Linienzuges liefert. Diese letzte Methode wird auch auf Zylinder ausgedehnt, deren Reflexionsvermögen kleiner als Eins ist.

R. Ullrich (Prag).

Warren, B. E.: X-ray diffraction in random layer lattices. Phys. Rev., II. s. 59, 693—698 (1941).

Die geometrische Interferenztheorie für ein „Kristallpulver“ aus zweidimensionalen (d. h. dünnen) Kristallplättchen paralleler Ebenenstellung, aber zufälliger Orientierung um die Ebenen-Normale, wird entwickelt und gezeigt, daß natürlich keine Raumgitterinterferenzen des Typs (hkl), sondern nur ($00l$) — neben Flächengitterinterferenzen — auftreten. Gewisse, an einer vorbehandelten Probe von Ruß gewonnenen Interferenzen können so gedeutet werden.

Fues (Breslau).

Relativitätstheorie:

Haantjes, J.: Die Gleichberechtigung gleichförmig beschleunigter Beobachter für die elektromagnetischen Erscheinungen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 1288—1299 (1940).

Au moyen de résultats géométriques antérieurs (ce Zbl. 17, 422), l'auteur rappelle et précise la covariance des équations de Maxwell et de l'équation $ds^2 = 0$. Considérons une transformation conforme T qui fasse passer d'un tenseur fondamental euclidien g_{ij} à un tenseur fondamental encore euclidien $'g_{ij} = \sigma^2 g_{ij}$ (σ désignant une fonction de point). L'application dans les deux métriques de la formule classique donnant le potentiel d'une charge ponctuelle conduit dans les deux cas au même champ. Désignons par O' un observateur en mouvement uniformément accéléré par rapport à un système de référence cartésien O . A un tel mouvement, on peut attacher une transformation T telle que, dans le nouveau système de référence, l'accélération du mouvement soit nulle; l'unicité de la transformation est assurée grâce à des conditions supplémentaires, physiquement nécessaires. Il en résulte qu'en ce qui concerne les phénomènes électromagnétiques, le principe de relativité peut être étendu au cas des observateurs tels que O' ; en ce qui concerne l'électro-magnétisme, la géométrie de l'espace-temps est engendrée non pas par le groupe euclidien, mais par le groupe conforme. En terminant l'auteur montre que T transforme la masse élémentaire m en $m\sigma^{-1}$, ce résultat étant d'ailleurs en accord avec l'invariance de la constante h de Planck.

Lichnerowicz (Paris).

Atomphysik.

Statistik und kinetische Theorie der Materie:

Castelluccio, Domenico: Teoria dei doppi strati elettrici e delle differenze di potenziale di contatto tra fasi in equilibrio. 1. L'elettrostatica dei metalli. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 74, 57—84 (1941).

Castelluccio, Domenico: Teoria dei doppi strati elettrici e delle differenze di potenziale di contatto tra fasi in equilibrio. 2. L'elettrostatica delle soluzioni. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 74, 85—112 (1941).

Die einfachsten Vorstellungen der kinetischen Wärmetheorie der Gase und Lösungen, ergänzt durch Boltzmannsche Annahmen über die Verteilungswirkung der

mittleren elektrischen Felder auf Elektronen und Ionen, werden auf Gleichgewichte zwischen Metallen, ihren teils ionisierten Dämpfen und den Lösungen ihrer Salze angewendet. Im großen ergeben sich, wie beabsichtigt, bekannte Regeln der Phasengleichgewichte. Im einzelnen aber wird die Verteilung der Ladungsträger und ihrer Felder in den der Grenzfläche benachbarten Schichten jeder Phase gewonnen und auf diese Weise eine genaue Anschauung vom Zustandekommen und dem Endzustand der elektrostatischen Doppelschichten gebildet, deren Integralwirkung als Kontaktpotential meßbar ist. Auch Thermokraft und Peltiereffekt werden skizziert. Die für die Raumladungs-Übergangsschichten aufgestellten Differentialgleichungen lassen sich bei ebenen Schichten integrieren, was zu befriedigenden Zahlenvergleichen mit Meßergebnissen führt.

Fues (Breslau).

Kristallbau und fester Körper:

● Niggli, P.: **Von der Symmetrie und von den Baugesetzen der Kristalle.** (Die Gestalt. Abh. zu einer allg. Morphol. Hrsg. v. Wilhelm Pinder, Wilhelm Troll u. Lothar Wolf. H. 4.) Leipzig: Akad. Verlagsges. Becker & Erler Kom.-Ges. 1941. 64 S. u. 36 Fig. RM. 5.60.

An Hand der Kristall- und Mineralienkunde wird die zentrale Bedeutung des Symmetriebegriffes für die Naturwissenschaft ausführlich auseinandergesetzt. Äußere und innere Morphologie der Kristalle, die zutage tretenden Gesetzmäßigkeiten wie Rationalitätsgesetz, Symmetrieeigenschaften sowohl des Kontinuums wie des Diskontinuums, Beziehungen zwischen Struktur und Habitus, Selektionsprinzipien werden — durch sehr viele Figuren reich veranschaulicht — als Prototypen, die einer morphologischen Betrachtungsweise besonders zugänglich sind, behandelt. Den Abschluß bildet ein Vergleich von künstlerischem und naturwissenschaftlichem Schaffen, indem die Bedeutung des Symmetrieprinzips auch für Architektur und Malerei aufgezeigt wird.

W. Nowacki (Bern).

Elektronentheorie:

Godart, O.: **On space closure of periodic orbits in the field of a magnetic dipole.** J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 20, 207—217 (1941).

Verf. geht zunächst auf die Bedeutung der periodischen Bahnen geladener Teilchen in einem magnetischen Dipolfeld für die Theorie der kosmischen Strahlung und des Nordlichts ein. Das Problem läßt sich auf ein dynamisches System mit zwei Freiheitsgraden in der Meridianebene und einer Quadratur für die Bewegung in dieser Ebene zurückführen, dessen Lösungen stetige Funktionen der Anfangswerte der kanonischen Variablen sind mit der Einschränkung, daß die periodischen Bahnen singulär und ihre Nachbarbahnen nicht mehr periodisch sind. Verf. behandelt die Bestimmung der periodischen Bahnen und ihrer Nachbarbahnen und erörtert die analytische Fortsetzung um einen Gleichgewichtszustand oder eine periodische Bahn, die eine Lösung der Hamiltonfunktion darstellt und in deren Nähe unter gewissen Bedingungen weitere periodische Bahnen existieren. Die periodischen und ihre benachbarten Bahnen lassen sich dann durch Reihenentwicklung wiedergeben. Es sind auf diese Weise alle Elemente einer periodischen Bahn mit n Schwingungen, die sich nach m Umläufen um den Dipol schließen, zu berechnen.

W. Henneberg (Berlin).

Nicht-relativistische Quantentheorie:

Gentile jr., G.: **Per la teoria del modello vettoriale dell'atomo.** Ist. Lombardo, Rend., III. s. 74, 30—36 (1941).

Einige mit der Invarianz gegen Drehungen zusammenhängende Eigenschaften der Atomterme werden mit Hilfe der Operatoren $L_x = -i(y\partial/\partial z - z\partial/\partial y) \dots$ untersucht.

F. Hund (Leipzig).

Mulliken, Robert S.: **Species classification and rotational energy level patterns of non-linear triatomic molecules.** Phys. Rev., II. s. 59, 873—889 (1941).

Die aus den Symmetrieverhältnissen folgenden Eigenschaften der Rotationsterme

einer starr gedachten, nicht geradlinigen Molekel AB_2 werden übersichtlich zusammengestellt und die Beziehung zu drei einfachen Grenzfällen dargelegt. Sie dienen zur Ordnung der Gesamteigenfunktionen solcher Molekeln in bezug auf die Vertauschung der gleichen Kerne und die Inversion, zur Aufstellung von Auswahlregeln und von Regeln für die Störungen der Termfolgen infolge der Wechselwirkung von Rotation und Schwingung oder Elektronenbewegung. *F. Hund* (Leipzig).

Zachariasen, W. H.: Temperature diffuse scattering of a simple cubic lattice. *Phys. Rev.*, II. s. 59, 860—866 (1941).

Verf. berechnet für ein einfaches kubisches Gitter mit Born-Karmanschem Bindungstyp durch ein Näherungsverfahren die Verteilung der am Wärmespektrum normaler Temperaturen hauptsächlich beteiligten elastischen Wellen. 2 Grenzfälle lassen sich angeben und übersehen, die durch die Beziehungen zwischen den elastischen Konstanten $c_{11} = 3c_{12}$ bzw. $c_{11} \gg 3c_{12}$ gekennzeichnet sind. Die elastische Wellenverteilung kann experimentell geprüft werden durch Beobachtung der diffusen sog. inkohärenten Röntgenstreuung in der Umgebung einer Laue-Interferenz, wie aus einer früheren Arbeit des Verf. [*Phys. Rev.* 57, 597 (1940)], aber auch aus anderen Darstellungen (z. B. aus dem soeben erschienenen Buche v. Laues) entnommen werden kann. Man hat hierzu ein paralleles monochromatisches Röntgenbündel in einer vom Glanzwinkel etwas abweichenden Richtung einfallen zu lassen. Eine einfache Überlegung an der Ausbreitungskugel im reziproken Gitter zusammen mit der für inkohärente Streuung abgewandelten Lauebedingung $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 + \mathbf{R} = \mathbf{h}$, (\mathbf{R} der Ausbreitungsvektor der elastischen Welle), erlaubt zu übersehen, welche Wärmewellen zur Entstehung eines uneigentlichen Interferenzpunkts Anlaß geben, ferner wo das Intensitätsmaximum dieser Strahlung liegt, welche scheinbare Abweichung vom Braggschen Gesetz und welche Halbwertsbreite sich dabei einstellen. Die Theorie wird mit den wenigen vorliegenden Messungen in befriedigender, jedenfalls besserer Übereinstimmung befunden, als eine durch zu rohe Näherung früher gewonnene Abschätzungsformel desselben Verf. Ein von manchen Beobachtern festgestellter diffuser Hof um den Primärstrahl wird erörtert; Verf. schließt, daß er nicht als Temperaturstreuung des Gitters gedeutet werden darf. *Fues* (Breslau).

Raman, C. V., and P. Nilakantan: Quantum X-ray reflection in diamond. (*Dep. of Physics, Indian Inst. of Sci., Bangalore.*) *Nature*, Lond. 147, 118—119 (1941).

Vorläufige Mitteilung über die Beobachtung einer uneigentlichen Interferenz (vgl. das vorsteh. Ref.) an Diamant und Bestätigung eines dafür von Verff. aufgestellten erweiterten Braggschen Gesetzes bez. der Geometrie solcher Streufelder. Aus der Aufnahme folgert Raman die mittlere Ausbreitungsrichtung der hauptsächlich beteiligten elastischen Wärmewellen. *Fues* (Breslau).

Gentile jr., G.: Osservazione sopra le statistiche intermedie. *Ist. Lombardo, Rend.*, III. s. 74, 133—137 (1941).

Es wird eine Quantenstatistik untersucht, bei der in jeder Zelle des Phasenraumes bis zu d Teilchen sein können. *F. Hund* (Leipzig).

Vleck, J. H. van: Paramagnetic relaxation and the equilibrium of lattice oscillators. *Phys. Rev.*, II. s. 59, 724—729 (1941).

Verf. weist auf verschiedene prinzipielle Schwierigkeiten bei der Deutung der paramagnetischen Relaxation durch Casimir und du Pré für tiefe Temperaturen hin. Zunächst wird überschlagen, daß nur extrem wenige Gitterschwingungen die Spinerie bei Ummagnetisierungsprozessen aufnehmen können. Dann wird gezeigt, daß diese Gitterschwingungen selbst keineswegs die Energie an die Umgebung des Körpers ableiten können, auch ist eine ausreichende Energieübertragung an die übrigen Gitterschwingungen und Weiterleitung durch diese nicht möglich. Daher kann das System der Gitterschwingungen nicht, wie es im allgemeinen geschieht, als Thermostat gegenüber dem Spinsystem angesehen werden. (Bei höheren Temperaturen, auch schon bei der der flüssigen Luft, tritt diese Schwierigkeit nicht auf, da hier andere Elementar-

prozesse wie Ramaneffekt bei der Streuung von Gitterschwingungen an dem Spinsystem dafür sorgen, daß von vornherein alle Gitterschwingungen am Prozeß der Energieübertragung beteiligt sind.) Als Ausweg aus dieser Schwierigkeit schlägt Verf. die Berücksichtigung virtueller Gitterzustände als Zwischenstufen bei der Energieübertragung vor.

Sauter (Königsberg).

Relativistische Quantentheorie:

● Destouches, J.-L.: *Corpuscules et systèmes de corpuscules. Tome 1: Notions fondamentales.* Paris: Gauthier-Villars 1941. XIV, 343 pag. ffrs. 160.—

A l'aide de 109 théorèmes, formulés en langage logico-mathématique, l'auteur discute, dans ce 1er volume, les notions fondamentales d'une théorie des corpuscules élémentaires. C'est la notion de l'indiscernabilité des particules que l'auteur met à la base de ses considérations. Ces principes fondamentaux de l'atomisme sont: „1er principe: Tout système physique observable est un système fini (= composé d'un nombre fini de systèmes élémentaires, le réf.) quels que soient les procédés de morcellement envisagés — 2ème principe: Quels que soient les procédés de morcellement envisagés, toute partie élémentaire est un système élémentaire observable — 3ème principe: Quels que soient les procédés de morcellement envisagés, les systèmes élémentaires (relativement à ces procédés) appartiennent à plusieurs types. L'ensemble de ces types est un nombre fini. Les systèmes élémentaires de même type sont indiscernables les uns des autres. Deux systèmes élémentaires de types distincts sont discernables.“ — L'ouvrage est muni d'une préface de L. Brillouin (2 pages). Les chapitres sont: I. Principes de l'atomisme (37 pages); II. Temps et signaux (52 pages); III. Notion d'espace (62 pages); IV. Notion de prévision (55 pages); V. Eléments de prévision (69 pages); Conclusion (12 pages). — (La notion fondamentale du champ n'est pas introduite et des applications à des problèmes physiques ne sont pas non plus discutées, le réf.)

v. Stueckelberg (Genf).

Bartlett, J. H., and R. E. Watson: *The elastic scattering of fast electrons by heavy elements.* Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 74, 53—68 (1940).

Das Ziel der Arbeit ist die numerische Auswertung der von Mott abgeleiteten strengen Formeln für die Streuung von Elektronen an Coulombschen Kraftfeldern nach der relativistischen Wellenmechanik, mit besonderer Berücksichtigung des Polarisierungseffektes. Und zwar werden die Mottschen Formeln (Summen über Kugelfunktionen), die von Mott selbst nur für leichte Kerne angenähert aufsummiert wurden, gliedweise berechnet für die Kernladungszahl $Z = 80$ (Hg). Das Resultat wird in ausführlichen Tabellen und Kurven wiedergegeben. Erwähnenswert ist, daß der Mottsche Asymmetrieeffekt bei der doppelten Streuung im Maximum etwas kleiner wird (um rd. 3%).

Sauter (Königsberg i. Pr.).

Fierz, Markus: *Klassische Theorie der Streuung geladener Mesonen.* (Math. Phys. Seminar u. Physik. Anst., Univ. Basel.) Helv. phys. Acta 14, 257—270 (1941).

Eine vektorielle Mesonenwelle trifft auf ein ruhendes, schweres Kernteilchen. Unter alleiniger Berücksichtigung der Kopplung mit der Ladung (nicht dem Spin) des schweren Teilchens wird die Streuung in einer klassischen korrespondenzmäßigen Weise berechnet, die die Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung gestattet. Von ihr abgesehen, zeigt sich weitgehend Übereinstimmung mit der quantentheoretischen Behandlung; die Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung bringt die Theorie auch noch nicht in Einklang mit den Erfahrungen bei der kosmischen Strahlung. F. Hund.

Serpe, J.: *Remarques sur le champ de rayonnement mésique.* Physica, Haag 8, 748—758 (1941).

Ein Neutron mit den Koordinaten z_i führe kleine Schwingungen aus:

$$z_i = \frac{\beta_i}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi_i), \quad \beta_i \ll 1.$$

(Die Lichtgeschwindigkeit c ist 1 gesetzt.) Falls $\omega_0 > \chi$, wo $\hbar\chi$ = Mesonenmasse, strahlt

das Neutron ein „Mesonfeld“ aus. Die Koppelung des Mesonfeldes mit dem Neutron soll hierbei „quasielektrisch“ sein. Die Energie und der Drehimpuls dieses Feldes, die in einer Kugel vom Radius R enthalten sind, werden berechnet. Ebenso wird der Energiestrom $\Phi^{(E)}$ und der Drehimpulsstrom $\Phi_{ij}^{(M)}$ aus der Kugel berechnet. Im Falle, daß die Neutronenoszillation um die z_3 -Richtung zirkular polarisiert ist, gilt wie in der Optik

$$\frac{|\Phi_{12}^{(M)}|}{\Phi^{(E)}} = \frac{1}{\omega_0}. \quad M. Fierz \text{ (Basel).}$$

Stueckelberg, E. C. G.: Un nouveau modèle de l'électron ponctuel en théorie classique. (Inst. de Physique, Univ., Genève.) *Helv. phys. Acta* **14**, 51–80 (1941).

Es wird eine relativistisch invariante Theorie eines punktförmigen Teilchens aufgestellt, das mit einem skalaren Feld und dem Maxwell'schen Felde in Wechselwirkung steht, derart, daß die Selbstenergie des Teilchens endlich bleibt. Seien x_μ die Koordinaten von Raum und Zeit ($\mu = 1, 2, 3, 4$; $x_4 = it$; $c = 1$); q_μ die Koordinaten des Teilchens, die in Abhängigkeit von einem Parameter s gegeben seien, so genügt das Maxwell'sche Feld $F_{\mu\nu}$ den Gleichungen

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}; \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 4\pi e \int ds \dot{q}_\mu \varrho(x - q(s)).$$

Das skalare Feld Ψ genügt den Gleichungen

$$K_\mu = \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu}, \quad \frac{\partial K_\mu}{\partial x_\mu} - l^2 \Psi = -4\pi e \int ds (-\dot{q}_\mu \dot{q}_\mu)^{1/2} \varrho(x - q(s)).$$

Es ist wesentlich, daß in der Gleichung für $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$ und für $\frac{\partial K_\mu}{\partial x_\mu}$ auf der rechten Seite dieselbe Konstante e auftritt. $\varrho(x)$ ist die Gestaltfunktion des Teilchens, die nachher gleich $\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\delta(x_4)$ gesetzt werden soll (punktförmiges Teilchen). Man macht nun für den Energie-Impuls-Tensor des Gesamtsystems den Ansatz

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -K_\mu K_\nu + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (K_\alpha K_\alpha + l^2 \Psi^2) - F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right\} \\ + e \Psi \int ds \dot{q}_\nu \dot{q}_\mu (-\dot{q}_\alpha \dot{q}_\alpha)^{-1/2} \varrho(x - q(s)).$$

Dieser Ausdruck hat die Eigenschaft, daß auch für ein punktförmiges Teilchen die Gesamtenergie endlich bleibt. Bei verschwindenden äußeren Feldern, im Ruhssystem des Teilchens ($\dot{q}_k = 0$, $k = 1, 2, 3$) ist $\int d x^3 W_{44} = \frac{1}{2} e^2 l \equiv M$. (NB. Äußere Felder sind solche, die den homogenen Feldgleichungen genügen.) Die Bewegungsgleichungen für q_μ folgen aus der Forderung der Energie- und Impulserhaltung. In ihnen spielt M die Rolle der Teilchenmasse. Sie lauten im Ruhssystem des Teilchens:

$$\frac{1}{2} e^2 l \ddot{q}_i - \frac{2}{3} e^2 \ddot{q}_i - l^{-1} \left\{ \frac{e^2}{8} \ddot{q}_i + \dots \right\} = e (F_i^e + K_i^e + \ddot{q}_i \Psi^e)_{x=q}.$$

Der Index e bedeutet, daß es sich um die äußeren Felder handelt. F_i ist das elektrische Feld. Die für das Feld Ψ charakteristische Länge $\frac{1}{l}$ spielt eine ähnliche Rolle wie der Elektronenradius r bei Lorentz. Dieser ist jedoch hier gleich Null gesetzt. Falls Ψ^e verschwindet und die in der Fourier-Analyse von \dot{q}_i auftretenden Frequenzen klein sind gegen l , werden keine Ψ -Wellen ausgestrahlt, und es gelten daher die Bewegungsgleichungen des Lorentz'schen Elektrons. Es werden weiter die Streuquerschnitte für schwache äußere Felder bei kleinen und großen Frequenzen diskutiert sowie eine Verallgemeinerung der Theorie auf mehrere Felder.

M. Fierz (Basel).

Ginsburg, V. L.: Zur Theorie des Spins elementarer Teilchen. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **31**, 319–323 (1941).

Es wird ein Spinteilchen behandelt, das ein magnet. Moment $\vec{M} = \vec{\mu} D(r)$ trägt. $D(r)$ ist ein Formfaktor. Es ist $\vec{\mu} = \kappa \vec{s}$, wo \vec{s} das Spinnmoment bedeutet. Unter Berücksichtigung des Eigenfeldes gelten die Bewegungsgleichungen

$$(1) \quad \dot{\vec{s}} = \kappa \left[\vec{s} \vec{H} \right] - \frac{4\pi\kappa\mu^2}{3\pi c^3} \left[\vec{s} \vec{s} \right].$$

Der Dämpfungsterm $\sim [\vec{s} \vec{s}]$ wird vernachlässigt. $\nu_m \sim \frac{c}{r_0}$, wo r_0 der Radius des Teilchens ist. \vec{H}_e ist das äußere Magnetfeld. Die Gleichung (1) läßt sich in der Form

$$(2) \quad \dot{\vec{\sigma}} = \kappa [\vec{s} \vec{H}], \quad \dot{\vec{s}} = -\frac{3\pi c^3}{4\nu_m \kappa^2 s^2} [\vec{s} \vec{\sigma}]$$

schreiben. Sei $\vec{\varrho} = \vec{\sigma} - \vec{s}$. Dann werden \vec{s} und $\vec{\varrho}$ als Operatoren aufgefaßt, die den Vertauschungsrelationen $[\vec{\varrho} \vec{\varrho}] = i\hbar \vec{s}$, $[\vec{s} \vec{s}] = i\hbar \vec{s}$, $[\varrho_i s_k] = 0$ genügen. Die Gleichungen (1) bzw. (2) folgen dann aus dem Hamiltonoperator $H = \beta (\vec{s} \vec{\varrho}) - \kappa (\vec{s} \vec{H})$ mit $\beta = \frac{3\pi c^3}{4\nu_m (2s^2 - \frac{\hbar^2}{2})}$. Der Term $\sim \beta$ entspricht einer inneren Rotationsenergie des Teil-

chens, $\vec{\sigma}$ ist sein Gesamtdrehimpuls. Ist $|\varrho| = k$, $|s| = l$, so nimmt $|\sigma|$ die Werte $|k+l|, |k+l-1|, \dots, |k-l|$ an, was verschiedenen Anregungszuständen des Teilchens entspricht. Die Theorie soll relativistisch verallgemeinert werden. *M. Fierz.*

Kramers, H. A., F. J. Belinfante und J. K. Lubánski: Über freie Teilchen mit nicht-verschwindender Masse und beliebiger Spinquantenzahl. Physica, Haag 8, 597—627 (1941).

Es werden die Lösungen der Gleichung $(N\kappa + \Gamma^\lambda \partial_\lambda) \Psi = 0$ untersucht ($\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}$; $\lambda = 0, 1, 2, 3$). Γ^λ ist ein Vektoroperator, der wie folgt dargestellt werden kann: $\Gamma^\lambda = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \gamma_n^\lambda$; $\epsilon_n = \pm 1$. Die γ_n^λ sind Dirac-Matrizen, die auf die Indizes k_n des „Undors“ $\Psi_{k_1 \dots k_N}$ wirken. Das Feld Ψ beschreibt eine Gesamtheit von „Teilchen“ mit den Massen $\kappa_\mu = \frac{N}{N-2\mu} \kappa$; $\mu = 0, 1, 2 \dots$ $\begin{cases} 1/2(N-1) \text{ falls } N \text{ ungerade,} \\ 1/2(N-2) \text{ falls } N \text{ gerade,} \end{cases}$ d. h. es ist

$$\Psi = \sum_\mu \Psi_\mu; \quad \square \Psi_\mu = \kappa_\mu^2 \Psi_\mu.$$

Da die untersuchte Differentialgleichung aus einem Variationsprinzip folgt, so sind der Energie-Impuls-Tensor und die Stromdichte des Feldes eindeutig aus jenem ableitbar. Im Spezialfall $\epsilon_n = +1$ und unter der Voraussetzung, daß Ψ_k in allen Indizes symmetrisch ist, sind die Lösungen, die zur Masse κ gehören ($\mu = 0$) identisch mit denjenigen der Gleichungen von Dirac und Fierz [Dirac, Proc. Roy. Soc. London A 155, 447 (1936); Fierz, Helv. physica Acta 12, 3 (1939)]. In diesem Falle ist die Feldenergie (N gerade) bzw. die Ladung (N ungerade) positiv definit. Im allgemeinen ist dies jedoch, falls $N > 2$ ist, nicht mehr der Fall, und zwar geben die ungeraden μ zu negativen Energien bzw. Ladungen Anlaß. Dies macht eine physikalische Anwendung der Theorie unmöglich. Die von Dirac und Fierz entwickelte Theorie ist frei von dieser Schwierigkeit. *M. Fierz (Basel).*

Rozental, Stefan: On the theory of β -decay. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 18, Nr 7, 1—44 (1941).

Ein Mesonfeld, für das die von Møller und Rosenfeld (dies. Zbl. 23, 287) vorgeschlagene Kombination eines vektoriellen und eines pseudoskalaren Feldes angenommen wird, wird verknüpft mit dem Feld von schweren Teilchen und leichten Teilchen. Die allgemeinste Hamiltonfunktion einer solchen Verknüpfung enthält Glieder, die einer direkten Wechselwirkung der schweren Teilchen mit den leichten Teilchen entsprechen. Der β -Zerfall erscheint so z. T. als Effekt zweiter Ordnung (Wechselwirkung von schweren und leichten Teilchen durch Vermittelung der Mesonen), z. T. als Effekt erster Ordnung. Die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten gibt darum Glieder vom Typ der Fermischen Theorie (dies. Zbl. 9, 91) und auch andere Glieder. Der Einfluß auf die Form der Energieverteilungskurve des β -Spektrums wird untersucht. Schließlich wird die Wahl der noch willkürlichen Parameter in der Hamil-

tonfunktion durch die besondere Invarianzforderung Möllers (dies. Zbl. 25, 140) eingeschränkt.

F. Hund (Leipzig).

Götte, Hans: Neue bei der Uranspaltung auftretende Strontium- und Yttrium-Isotope. Naturwiss. 29, 496—500 (1941).

Astrophysik.

Schrutka-Rechtenstamm, G. von: Über die Genauigkeit von definitiven Bahnbestimmungen von Doppelsternen. Astron. Abh. 10, Nr 4, D 1—D 30 (1941).

Unter gewissen Annahmen über eine ideale Verteilung der Beobachtungen von Doppelsternen — visuellen oder spektroskopischen — und unter gewissen Hypothesen über die relative Genauigkeit bestimmter Messungen gelingt es Verf., für die mittleren Fehler der Bahnelemente ganz allgemein theoretische Mindestwerte anzugeben, sie also als Funktionen der Bahnelemente darzustellen. An eine solche Möglichkeit ist bisher nicht gedacht worden, der Ansatz wirkt überraschend. Durch eine neuartige, geschickte Symbolik vermag Verf. der Fülle der langen Formeln einigermaßen Herr zu werden, verwickelt bleiben die Ausdrücke freilich im allgemeinen doch. Erst für Spezialfälle treten wesentliche Vereinfachungen ein, die man zusammengestellt findet. Am Beispiel des gut bekannten Systems α Centauri zeigt Verf., daß auch in einem so günstigen Falle die numerisch gefundenen Unsicherheiten der Bahnelemente noch durchweg deutlich, wenn auch nicht allzu stark, über den theoretischen unteren Schranken liegen.

v. Schelling (Berlin-Charlottenburg).

Hagihara, Yusuke: The electron velocity distribution in the planetary nebulae. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 100, 631—634 (1940).

Die Geschwindigkeitsverteilung der freien Elektronen in planetarischen Nebeln wird untersucht, indem die Form der Funktion nicht von vornherein als vom Maxwell'schen Typ angenommen wird, sondern als entwickelbar in eine konvergente Reihe von Hermiteschen Polynomen. Diese Funktion wird in die Boltzmannsche Integro-Differentialgleichung eingesetzt. Die Abweichungen von der Maxwell'schen Verteilung ergeben sich in erster Näherung aus dem Betrage eines dimensionslosen Koeffizienten β_2 , der die relative Größe des ersten Korrektionsterms zur Maxwell-Verteilung mißt. Der Koeffizient β_2 ergibt sich zu etwa $-0,3$ und die Temperatur, etwa definiert durch die mittlere kinetische Energie der freien Elektronen, ist wesentlich anders (um einen Betrag von der Ordnung 30—50%), als sie sich bei Voraussetzung einer Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung ergeben würde. Vorausgesetzt wird eine nicht zu hohe optische Dicke des Nebels, so daß die einfallende Strahlung vorwiegend aus der direkten Strahlung des Zentralsterns besteht, für welche eine Plancksche Energieverteilung im Spektrum angenommen wird.

L. Biermann (Babelsberg).

Goldberg, Leo: Physical processes in gaseous nebulae. 15. The statistical equilibrium of neutral helium. Astrophys. J. 93, 244—249 (1941).

Der stationäre Zustand eines neutralen Heliumgases unter der Einwirkung eines verdünnten Strahlungsfeldes wird im Hinblick auf das Problem der Gasnebel untersucht. Gegenüber den ähnlichen Rechnungen von Struve und Wurm [Ap. J. 88, 84 (1938)] werden 2 weitere Niveaus berücksichtigt, nämlich die Summe aller Singulett-Terme oberhalb von 2^1P und die Summe aller Triplett-Terme oberhalb von 2^3P . Die Temperatur des Strahlungsfeldes wird zu 50000 bzw. 100000 Grad angenommen, die Temperatur der freien Elektronen, für die eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung vorausgesetzt wird, zu zwischen 5000 und 80000 Grad. Für die in Betracht kommenden Übergangswahrscheinlichkeiten werden neue asymptotische Ausdrücke angegeben. Das Resultat der Arbeit sind die relativen Besetzungszahlen der 7 berücksichtigten Niveaus, sämtlich bezogen auf die Zahl der Heliumionen als Einheit. In Übereinstimmung mit Struve und Wurm ergibt sich eine starke Besetzung der metastabilen Niveaus sowie eine stärkere Besetzung der Triplett- im Vergleich zu den Singulett-Termen.

L. Biermann (Babelsberg).